PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

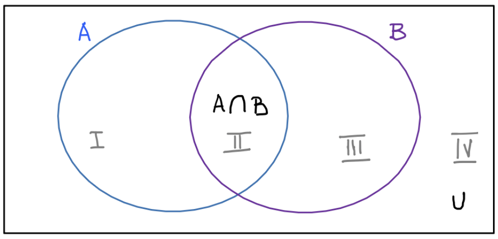
Fakulta strojní ČVUT v Praze 2023

Lekce 10
Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Kombinatorika **Kombinatorické pravidlo součtu**

Příklad 1, CERMAT, podzim 2020

Ve třídě je 32 žáků,
13 z nich hraje na kytaru, 15 na flétnu a 10 žáků nehraje na žádný z těchto dvou nástrojů.
Vypočtěte, kolik žáků třídy hraje na kytaru i na flétnu. . . . . [6]



Označme A množinu kytaristů, B množinu flétnistů,
U množinu nehudebníků.

I	prvky U, které patří do A a zároveň nepatří do B
II	prvky U, které patří do A a zároveň patří do B
III	prvky U, které patří do B a zároveň nepatří do A
IV	prvky U, které nepatří do A a zároveň nepatří do B

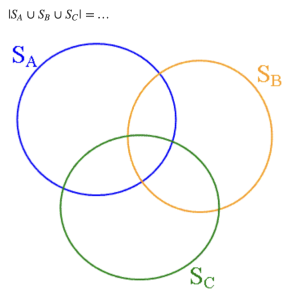
Příklad 2

Na přednášku přišlo 140 studentů pěšky nebo přijeli MHD. Jinak způsob dopravy nepoužil nikdo.
Při cestování MHD je možné použít autobus, tramvaj nebo metro.

- Autobusem přijelo 80 studentů, metrem 70, tramvají 50.
- Autobus a metro použilo 40 studentů.
- Autobus a tramvaj použilo 30 studentů.
- Metro a tramvaj použilo 30 studentů.
- Všechny 3 druhy MHD při jedné cestě použilo 20 studentů.

Kolik studentů nepoužilo MHD? . . . . [20]

Množinu studentů, kteří přijeli autobusem označíme S_A,
metrem S_B, tramvají S_C. Potom počet studentů, kteří použili alespoň
jeden druh MHD, je stejný, jako počet prvků množiny $SA \cup SB \cup SC$.



$SA \cup SB \cup SC = |SA| + |SB| + |SC| - |SA \cap SB| - |SA \cap SC| - |SB \cap SB| + |SA \cap SB \cap SC|$
Alespoň jeden druh MHD použilo . . . . [120] studentů.
Přišlo 140 studentů, zbývá tedy . . . . [20] studentů, kteří přišli pouze pěšky.

Kombinatorika — Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 3, CERMAT, jaro 2021

Z šesti číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 vytváříme pěticiferná čísla, v jejichž zápisu jsou v každé trojici sousedních číslic tři různé číslice (např. číslo 10 240: 102, 024 a 240). Číslo nezačíná číslicí 0.
Kolik pěticiferných čísel splňujících uvedené podmínky lze vytvořit? . . . . [1600]

Příklad 4, CERMAT, podzim 2018

Před vstupem do místnosti je nutné otevřít dvoje dveře.
U každých dveří se zadává čtyřmístný kód, který může obsahovat číslice 0,. . . , 9. Dále platí:
kód u prvních dveří obsahuje všechny 4 číslice 1,2,3,4; kód u druhých dveří splňuje současně podmínky: neobsahuje číslici, která je v kódu u prvních dveří, obsahuje právě dvakrát číslici 0, a to na druhém a třetím místě, neobsahuje kromě 0 žádnou číslici vícekrát.
Určete počet všech možností splňujících podmínky zadání pro kód
u prvních dveří . . . . [24]
u druhých dveří . . . . [20]

Faktoriál

$$n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

Příklad 5

Zjednodušte (pro $n\in\mathbb{N}$)

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{(2n)!}{(2n+1)!} + \frac{(3n-1)!}{(3n-2)!} = \ldots = (n+1) - \frac{1}{2n+1} + (3n-1) = \frac{8n^2+4n-1}{2n+1}$$

Příklad 6, CERMAT, podzim 2024

Jsou dána čísla A a B, $A = 1000!\cdot 3!$, $B = 999!\cdot 5!$
Kolikrát je číslo A větší než číslo B? . . . . [50 krát]

Kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklad 7

Řešte rovnici s neznámou $n\in\mathbb{N}$.

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4$$

Příklad 8, CERMAT, jaro 2015

Jaký je absolutní člen rozvoje $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{15}$? . . . . $\frac{15!}{3!\cdot 12!}$
(absolutní člen neobsahuje proměnnou x)

Příklad 9, CERMAT, podzim 2024

Jsou dána kombinační čísla $A = \binom{8}{4}, B = \binom{8}{k}$.

		A	N
22.1	Rovnice $(A^2 - 4\,900)x = 0$ pro neznámou $x\in\mathbf{R}$ má právě jeden kořen.		
22.2	Pro $k=5$ platí, že $\frac{B}{A} = 0{,}8$.		
22.3	Největší možná hodnota součinu $A\cdot B$ nastává pro $k=4$.		

Příklad 10, CERMAT, jaro 2024

`https://maturita.cermat.cz/files/files/MA_MZ2024J_TS.pdf`

Při přípitku na oslavě narozenin se ozvalo 15 ťuknutí. Každý účastník oslavy si jedenkrát přiťukl s každým.
Kolik osob bylo na oslavě? . . . . [6]

Pravděpodobnost

Příklad 11, CERMAT, 2022,podzim

V osudí je 9 míčků. Každý z nich je označen právě jedním přirozeným číslem od 1 do 9.
Žádné dva míčky nejsou označeny stejným číslem.
Z osudí postupně vylosujeme 7 míčků, které nevracíme zpět.

(CZVV)

1 bod

10 Vypočtěte pravděpodobnost, že oba míčky, které zbudou v osudí, jsou označeny sudými čísly.

Počet možných dvojic, které zbydou v osudí: .... $\left[v = \binom{9}{2}\right]$.

V osudí byly 4 míčky se sudým číslem. Počet možných dvojic sudých čísel .... $\left[p = \binom{4}{2}\right]$.

Pravděpodobnost .... $\left[\frac{p}{v} = \frac{1}{6}\right]$

Příklad 12, CERMAT, jaro 2021

V balíčku je 12 karet očíslovaných přirozenými čísly od 1 do 12. (Každá karta obsahuje právě jedno číslo, žádné dvě karty nejsou očíslovány stejným číslem.) Balíček zamícháme a náhodně vytáhneme dvojici karet.

Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti? .... $\left[\frac{5}{33}\right]$

Počet všech výsledků .... (dvojice z 12) .... $\binom{12}{2}$

Příznivé výsledky: součet je 6, 12 nebo 18.
Počet příznivých výsledků (žádné 2 karty nemají stejné číslo) .... 10.

součet	dvojice	počet
6	1 a 5, 2 a 4	2
12	1 a 11, 2 a 10, 3 a 9, 4 a 8, 5 a 7	5
18	6 a 12, 7 a 11, 8 a 10	3

Příklad 13, CERMAT, podzim 2023

V osudí je deset stejných míčků, každý je označen jedním z písmen A, B, C.
Tabulka udává rozdělení četností písmen.

Písmeno	A	B	C
Četnost	5	2	3

Z osudí postupně po jednom vylosujeme 3 míčky, které do osudí nevracíme.
Jejich písmena zapíšeme zleva doprava v pořadí, v jakém byly míčky vylosovány.

(CZVV)

Jaká je pravděpodobnost jevu:

Zápis písmen vylosovaných míčků je ABC. .... $P_1 = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{24}$

Zápis písmen vylosovaných míčků je BCC. .... $P_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{60}$

Příklad 14, CERMAT, jaro 2023

V osudí je 6 černých míčků a 4 bílé míčky. Náhodně vytáhneme dvojici míčků.
Jaká je pravděpodobnost, že oba dva vytažené míčky budou mít stejnou barvu?

Počet všech možností .... výběr dvou z deseti .... $\binom{10}{2} = 45$

Příznivé jevy: 2 černé ze 6 + 2 bílé ze 4 $\binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 15 + 6 = 21$

Pravděpodobnost: .... $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

Nepříznivé jevy: jeden černý a jeden bílý .... pravidlo součinu .... $6 \cdot 4$

Statistika

Příklad 15, CERMAT, jaro 2024

Během II. pololetí si oproti I. pololetí tři žáci třídy zlepšili výslednou známku z fyziky o 1 stupeň, dva žáci dokonce o 2 stupně. Ostatní žáci měli z fyziky v I. i ve II. poleltí stejnou známku. Aritmetický průměr výsledných známek z fyziky na konci II. pololetí se změnil oproti I. pololetí o čtvrt stupně.

Kolik žáků třídy dostalo na konci II. pololetí známku z fyziky? .... [28]

Označíme x součet známek v I. pololetí, N počet žáků, kteří dostali známku z fyziky.

Aritmetický průměr v I. pololetí byl .... $\frac{x}{N}$.

Zlepšení známek: (tři o 1 stupeň, dva o 2 stupně) znamená,
že součet známek ve II. pololetí bude $x-3-2\cdot 2$, tj. .... $x-7$.

Aritmetický průměr známek ve II. pololetí .... $\frac{x-7}{N}$.

Změna arit. průměru .... $\frac{x-7}{N}=\frac{x}{N}-\frac{1}{4}$ .... $-\frac{7}{N}=-\frac{1}{4}$ .... $N=28$.

Příklad 16, CERMAT, podzim 2021

Všech **90 žáků** čtvrtého ročníku dostalo známku ze závěrečného testu.

V tabulce jsou uvedeny pouze četnosti známek 1 a 4.

Dále platí: Žádné dvě četnosti nejsou stejné, medián známek je 2 a modus známek je 3.

Známka	1	2	3	4	5
Četnost	5			2	

(*CZVV*)

2 body

4 Určete, kolik žáků dostalo ze závěrečného testu trojku.

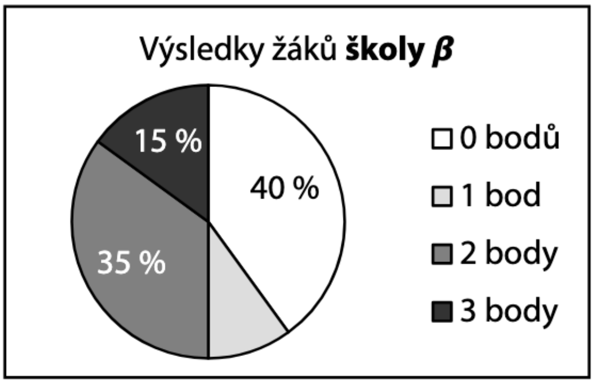
Označíme četnosti: počet dvojek n_2, počet trojek n_3, počet pětek n_5
Co je dáno?

- Počet žáků je 90. To znamená, že součet všech četností musí být 90.
  $5+n_2+n_3+2+n_5=90$, tedy $n_2+n_3+n_5=83$
- Žádné četnosti nejsou stejné, t.j. $n_2\neq n_3, n_3\neq n_5, n_3\neq n_5$
- Medián známek je 2. Medián určíme tak, že zapíšeme všechny známky $\underbrace{1,\dots,1}_{5},\underbrace{2,\dots,2}_{n_2},\underbrace{3,\dots,3}_{n_3},\underbrace{4,\dots,4}_{2},\underbrace{5,\dots,5}_{n_5}$.
  Zjistíme, které známky jsou (počet žáků je sudý, takže) na místech .... [45. a 46.]
  Musí tam být obě dvojky.
  To znamená, že dvojek musí být aspoň .... [41]
- Modus známek je 3, to znamená, že trojek musí být nejvíce.
- Z požadavku na modus a medián dostaneme, že dvojek a trojek dohromady musí být více než 82, nesmí být stejné. Už víme, že $n_2+n_3+n_5=83$,
  takže jediná možnost je: $n_2=$ ...., $n_3=$ ...., $n_5=$ .... [41,42,0]

Graf k úloze

https://maturita.cermat.cz/files/files/Matematika/intaktni-zaci/MZ2021/MZ2021_MA_DT.pdf

Všichni žáci tří škol (α, β, γ) se zúčastnili soutěže, v níž každý žák získal 0, 1, 2, nebo 3 body. Výsledky žáků jsou zaznamenány v následujících diagramech a tabulkách.



Výsledky žáků **školy γ**				
Počet bodů	0	1	2	3
Počet žáků		0	25	35

Pro každou školu zvlášť byly z výsledků žáků vypočteny charakteristiky polohy – medián, modus a aritmetický průměr. Ve škole γ byl průměrný počet bodů 1,24. Mezi mediány všech škol se zjistí nejnižší hodnota, stejně tak mezi mody a aritmetickými průměry.

	Medián	Modus	Aritmetický průměr
Škola α			
Škola β			
Škola γ			**1,24**
Nejnižší hodnota			

	počet bodů	0	1	2	3	arit.průměr	modus	medián
Škola α	počet žáků	25	$\boxed{40}$	25	10	$\frac{40+50+30}{100}=1,2$	$\boxed{1}$	1 (pozice 50 a 51)
Škola β	počet žáků	$\boxed{40\%}$	10%	35%	15%	$0,1+0,7+0,45=1,25$	$\boxed{0}$	$\frac{1+2}{2}=1,5$
Škola γ	počet žáků	$\boxed{65}$	0	25	35	1,24	$\boxed{0}$	0 (pozice 63)

Počet žáků ve škole γ určíme ze zadaného aritmetického průměru: $1,24=\dfrac{50+105}{x+25+35}\Rightarrow x+60=\dfrac{155}{1,24}$

Modus je hodnota s nejvyšší četností (počet bodů, který dostalo nejvíce žáků).

Medián určujeme z hodnot získaných bodů uspořádaných podle velikosti:

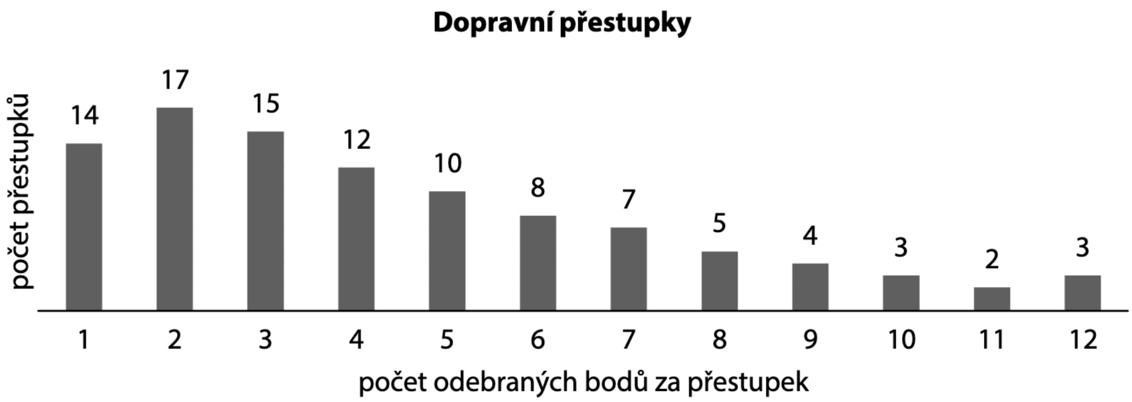
Škola α – sudý počet žáků, počítáme průměr 50. a 51. hodnoty (obě jsou 1).

Škola γ – lichý počet žáků, medián je roven prostřední (63.) hodnotě.

Škola β – 50% žáků získalo 0 nebo 1 bod, 50% žáků získalo 2 nebo 3 body;
medián je roven průměru hodnot na rozhraní 50%, tj. průměr 1 a 2.

Graf k úloze, CERMAT, katalog https://maturita.cermat.cz/menu/katalogy-pozadavku

V grafu je statistika dopravních přestupků ve sledovaném období. Závažnost dopravního přestupku vyjadřuje počet odebraných bodů.



Např. bylo spácháno 10 pětibodových přestupků.

(*CZVV*)

Příklad (5+) zadání

5.1 Určete průměrný počet bodů odebraný za jeden přestupek.

5.2 Určete, kolikrát počet odebraných bodů překročil průměrnou hodnotu.

5.3 Určete modus.

5.4 Určete medián.

5.5 Určete směrodatnou odchylku.

Příklad (3-) zadání

3.1 Určete, kolik bodů za přestupek bylo odebíráno nejčastěji.

3.2 Určete průměrný počet bodů odebraný za jeden přestupek.

3.3 Určete, v kolika případech počet odebraných bodů překročil průměrnou hodnotu.

3.4 Určete medián odebraných bodů za přestupek.

Postup řešení.

- **průměr**ný počet bodů odebraný za jeden přestupek
  Kolik bodů bylo odebráno celkem? .... [452]
  Kolik přestupků bylo zaznamenáno celkem? .... [100]
  Odpovědi (5.1 a 3.2) P = ... [4,52]

- kolikrát počet odebraných bodů překročil průměrnou hodnotu
  Odpovědi (5.2 a 3.3) počet přestupků, kdy bylo odebráno 5 a více bodů: .... [42]

- **modus** odebraných bodů za přestupek
  Modus je nejčastěji se vyskytující hodnota (odebraných bodů), tj. nejvyšší četnost (odebraných bodů)
  Odpovědi (5.3, 3.1) $\max\{14, 17, 15, \ldots 2, 3\} =$ .... [2]

- **medián** odebraných bodů za přestupek
  "nakopírujeme" odebrané body tolikrát, kolik bylo přestupků, tj. $\underbrace{1\ldots1}_{14}\underbrace{2\ldots2}_{17}\ldots$
  a určíme, co bude (celkový počet přestupků je sudý, takže) na místech .... [50 a 51]
  Odpovědi (5.4, 3.4) medián je .... [4]

- **směrodatná odchylka** (ach jo, vzorce...) $\sqrt{\text{rozptyl}}$, **rozptyl** $s_x^2 =$ .... $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; - \bar{x}^2$
  sečteme druhé mocniny odebíraných bodů vynásobených počty přestupků,
  tj. $1^2 \cdot 14 + 2^2 \cdot 17 + \ldots + 12^2 \cdot 3$ .... [2908]
  to je totéž, co součet $\underbrace{1\ldots1}_{14}, \underbrace{4\ldots4}_{17}, \underbrace{9\ldots9}_{15}, \underbrace{16\ldots16}_{12}, \underbrace{25\ldots25}_{10}, \underbrace{36\ldots36}_{8}, \underbrace{49\ldots49}_{7}, \underbrace{64\ldots64}_{5}, \underbrace{81\ldots81}_{4}, \underbrace{100\ldots100}_{3}\underbrace{121\ldots121}_{2}, \underbrace{144\ldots144}_{3}$
  vydělíme počtem přestupků .... odečteme průměr^2 .... odmocníme .... [$\sqrt{8,6496}$]

Kombinatorika

Variace, permutace, kombinace

záleží na pořadí? nezáleží na pořadí?

k-členná **variace** z n prvků

uspořádaná k-tice sestavená z prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. . . . . na pořadí záleží

$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (kombinatorické pravidlo součinu)

s opakováním: každý se v ní vyskytuje nejvýše k krát,

$V'(k,n) = n^k$

permutace z n prvků

uspořádaná n-tice sestavená z prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou . . . . na pořadí záleží

$P(n) = n!$

k-členná **kombinace** z n prvků

neuspořádaná k-tice sestavená z prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou . . . . na pořadí nezáleží

počet všech k-členných kombinací z n prvků je $\binom{n}{k}$

Statistika

Některé charakteristiky polohy kvantitativního znaku

- **aritmetický průměr** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
- **vážený aritmetický průměr** mají-li hodnoty u_j váhy (četnosti) v_j: $\bar{u}_V = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j v_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j}$
- **modus** $\mathrm{Mod}(x)$ je hodnota x_j s nejvyšší četností (n_j)
- **medián** $\mathrm{Med}(x) \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{pro liché } n \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right), & \text{pro sudé } n \end{cases}$
  kde $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ jsou hodnoty x_i uspořádané podle velikosti.

Některé charakteristiky variability

- **rozptyl** $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- **směrodatná odchylka** $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Doporučená četba.

- Učebnice: Řada "Učebnice pro gymnázia", díl "Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika." Autoři Emil Calda, Václav Dupač, vydavatelství Prometheus, 1993, dotisky.
- (kombinatorika)

  `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/kombinatorika`

- Sbírka příkladů: Matematika. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Autorka: Jindra Petáková, vydavatelství Prometheus, 1998, dotisky. Kapitoly 18 (kombinatorika) a 20 (Pravděpodobnost a statistika)
- `https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika`

Videa z lekcí najdete na

https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na

ludek.benes@ fs.cvut.cz