Úloha 20

Měření měrného náboje elektronu

Měrný náboj

Měrný náboj elektronu je definován jako poměr elektrického náboje elektronu a jeho hmotnosti. Většina metod ke stanovení měrného náboje elektronu vychází z pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli.

Ve vakuové trubici je elektron urychlován elektrickým polem o intenzitě $\vec{E}$. Toto elektrické pole je vytvořeno urychlujícím napětím o velikosti U. Toto pole předá elektronu energii o velikosti

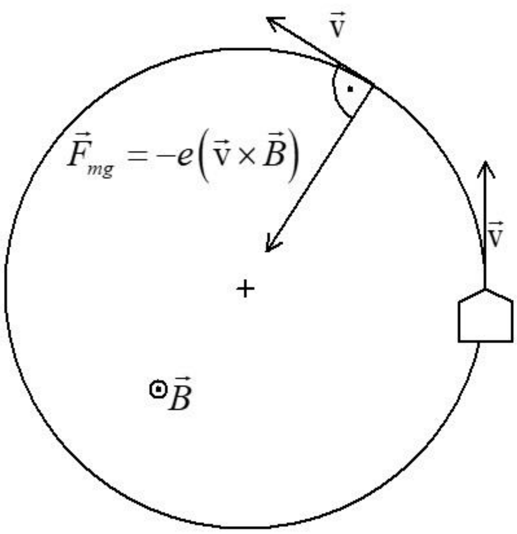
$$E_{el} = eU, \tag{1}$$

kde e je náboj elektronu a U je urychlující napětí. Ze zákona zachování energie platí

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 = eU, \tag{2}$$

kde $\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2$ je kinetická energie elektronu. Z tohoto vztahu vyjádříme vztah pro velikost rychlosti elektronu

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \tag{3}$$



Obr. 1 – pohyb elektronu v homogenním magnetickém poli

Na elektron s nábojem e pohybující se v magnetickém poli o indukci $\vec{B}$ rychlostí $\vec{\mathrm{v}}$ působí magnetická síla o velikosti

$$\vec{F}_{mg} = -e\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right), \tag{4}$$

tedy síla, jejíž velikost je přímo úměrná náboji elektronu a je kolmá k vektorům $\vec{\mathrm{v}}$ a $\vec{B}$. Jsou-li vektory rychlosti $\vec{\mathrm{v}}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ na sebe kolmé, můžeme psát pro velikost této síly

$$F_{mg} = e\mathrm{v}B. \tag{5}$$

Tato síla bude způsobovat pohyb po kružnici (obr. 1) a odpovídá dostředivé síle

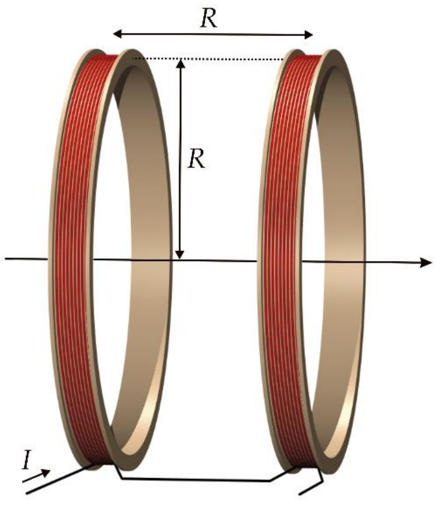
$$\frac{mv^2}{r} = evB, \tag{6}$$

kde r je poloměr dráhy elektronu. Ze vztahů (3) a (6) odvodíme výsledný vztah pro měrný náboj

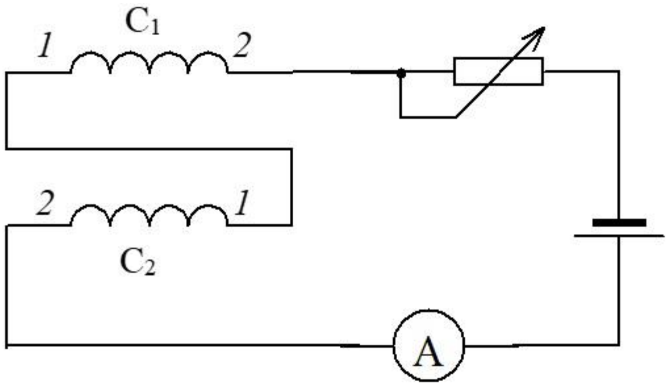
$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}. \tag{7}$$

Helmholtzovy cívky

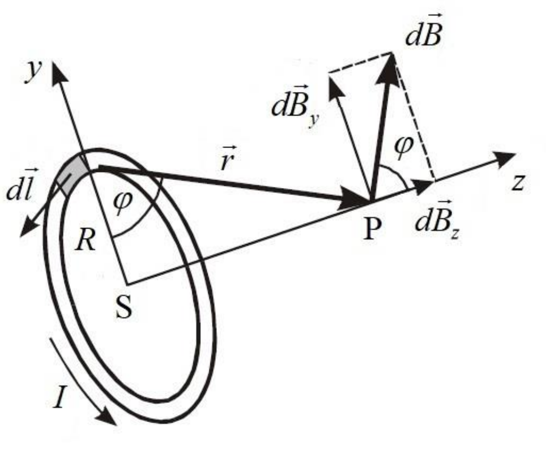
Magnetické pole, ve kterém se elektrony budou pohybovat, je vytvořené Helmholtzovými cívkami. Jedná se o dvě kruhové cívky o poloměru a vzdálenosti R, které jsou vůči sobě rovnoběžné (obr. 2). Proud teče cívkami stejným směrem (obr. 3). Dojde tak ke zvyšování magnetické indukce mezi cívkami. V takovéto soustavě cívek se mezi nimi vytvoří přibližně homogenní magnetické pole, jak si ukážeme.



Obr. 2 Helmholtzovy cívky



Obr. 3 Zapojení Helmholtzových cívek



Obr. 4 Kruhová smyčka

Odvodíme si vztah pro magnetickou indukci mezi cívkami. Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{8}$$

Na obr. 4 je znázorněna kruhová smyčka. Budeme integrovat po délce kruhové smyčky, kterou teče elektrický proud I. Malá část smyčky $d\vec{l}$ směřuje kolmo na vektor $\vec{r}$, který určuje vzdálenost k bodu P, ve kterém chceme zjistit hodnotu magnetické indukce. Pro vektorový součin platí $\left| d\vec{l} \times \vec{r} \right| = rdl \sin 90^\circ = rdl.$ Indukce $d\vec{B}$ je vlivem vektorového součinu kolmá na oba předchozí vektory. Indukce $d\vec{B}$ lze rozložit na složky v obou osách. Při integraci po délce kruhové smyčky bude vzhledem k symetrii existovat i opačný vektor ke každému $d\vec{B}_y$, a vyruší se tak. Zbyde pouze složka magnetické indukce ve směru osy z a bude pro ni platit

$$dB_z = dB\cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rdl}{r^3} \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rdl}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rdl}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{9}$$

kde souřadnice z určuje polohu bodu P, $\cos\varphi = \frac{R}{r}$ a z Pythagorovy věty platí $r = \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Po integraci tak dostaneme

$$B_z = \int_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rdl}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rdl}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot 2\pi R}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Pokud místo kruhové smyčky budeme mít tenkou cívku o N závitech, pak bude platit pro její magnetické pole na ose z

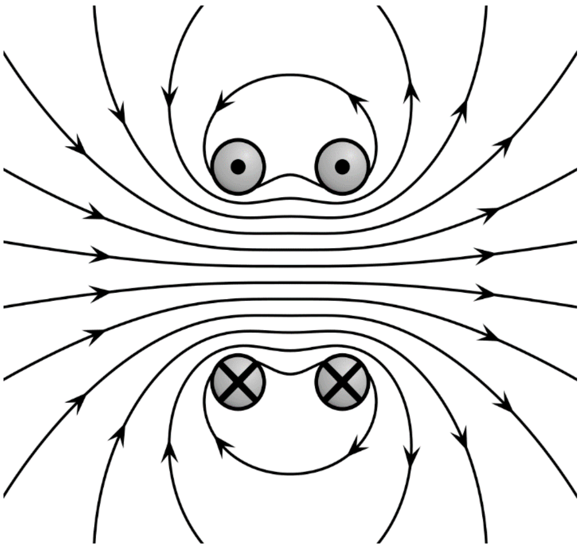
$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{\left(R^2\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{R^3\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Helmholtzovy cívky jsou soustavou dvou těchto cívek vzdálených od sebe o R (obr. č. 2). Pro magnetickou indukci uprostřed mezi nimi na ose z (souřadnice středu mezi cívkami je $z_1 = \frac{R}{2}$ pro první cívku a $z_2 = -\frac{R}{2}$ pro druhou cívku) bude platit

$$B = B_{z1} + B_{z2} = \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{1}{\left(1+\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{1}{\left(1+\frac{\left(-\frac{R}{2}\right)^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{2}{\left(1+\frac{\frac{R^2}{4}}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 NI}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 NI}{R}\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \doteq 0,716\mu_0\frac{NI}{R}. \tag{12}$$

Takto vytvořené magnetické pole se v ostatních bodech mezi cívkami málo odlišuje od námi spočtené hodnoty, a je tak prakticky homogenní (obr. 5).



Obr. 5 Tvar pole mezi cívkami

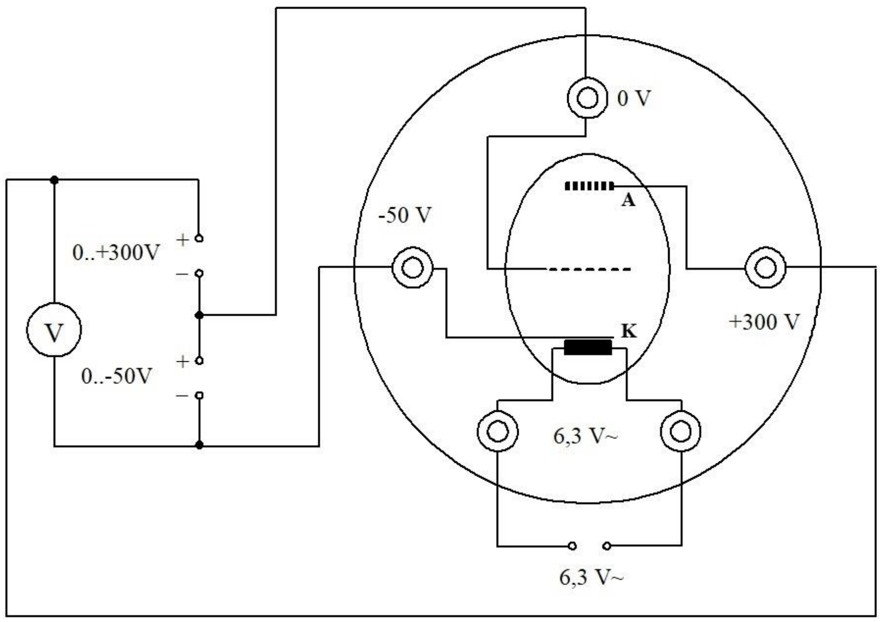
Wehneltova trubice

Mezi Helmholtzovými cívkami se nachází baňka s téměř vyčerpaným plynným vodíkem o tlaku 1 Pa – Wehneltova trubice. V ní se budou pohybovat elektrony vlivem magnetického pole po kružnici. Trajektorii elektronů bude možné sledovat v baňce, protože při jejich průchodu dojde srážkami s molekulami plynu k excitaci těchto molekul. Vlivem srážek s elektronovým svazkem dostanou elektrony v elektronovém obalu molekul energii a přejdou do vyššího kvantového stavu, ze kterého po čase spadnou na nižší stav a vyzáří u toho fotony.

My tak budeme moci pozorovat trajektorii průchodu elektronů v baňce vlivem vyzařování excitovaných molekul plynu.

Elektrickým proudem I můžeme regulovat magnetické pole mezi cívkami. Tento proud budeme měřit ampérmetrem v zapojení podle obr. 3. Vlivem této regulace budeme měnit poloměr kružnice, po které se elektrony pohybují. Uvnitř baňky máme žebříček, na kterém jsou stupínky vzdálené od sebe po 1 cm. Po dopadu svazku elektronů na žebříček se vždy daný stupínek rozsvítí, a známe tak poloměr kružnice.

Elektrony jsou urychlovány napětím mezi elektrodami v trubici (obr. 6). Katoda je žhavena střídavým napětím 6,3 V. Z ní termoemisí vylétávají elektrony, které z materiálu katody pomáhá vytrhávat stejnosměrné napětí mezi katodou a mřížkou (-50 V až 0 V) a napětí mezi mřížkou a anodou (0 V až 300 V). Mřížka slouží také k zaostření elektronů do svazku. Celkově tak urychlují elektrony obě stejnosměrná napětí a toto celkové napětí U mezi katodou a anodou budeme nastavovat a měřit pro zjištění rychlosti vylétávajících elektronů do baňky. Anoda má také strukturu mřížky, aby jí elektrony mohly prolétnout ven do baňky.



Obr. 6 – zapojení Wehneltovy trubice

Zadání:

1) Změřte a graficky znázorněte závislost $B = f\left(\frac{1}{r}\right)$ pro dvě hodnoty napětí.

2) Určete velikost měrného náboje elektronu z měření pro dvě různá měření.

Měření

a) Nastavte si takové napětí na Wehneltově trubici, abyste s ním byli schopni dostupným proudem zakřivit kružnici i na nejmenší stupínek žebříčku. Stupínky na žebříčku odpovídají poloměrům drah elektronů r a jsou 2 cm, 3 cm, 4 cm a 5 cm. Pro jednotlivé stupínky na žebříčku při $U = konst.$ stanovte požadované hodnoty dle tabulky:

Číslo měření	I [A]	B [T]	r [m]	$1/r$ [m^{-1}]
1				
2				
3				
4				

b) Magnetické pole vytvořené v prostoru baňky mezi Helmholtzovými cívkami vypočtěte podle vztahu (12) $B = 0{,}716\,\mu_0 \dfrac{NI}{R}$, kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}$ je permeabilita vakua, R poloměr Helmholtzových cívek ($R = 200$ mm), I proud tekoucí cívkami a N počet závitů každé cívky ($N = 154$).

c) Sestrojte graf závislosti $B = f\left(\dfrac{1}{r}\right)$ dle vztahu (7).

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{2\,U}{\frac{e}{m}}}\,\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad B = a\,\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad y = a\,x \tag{13}$$

d) Velikost měrného náboje elektronu určete ze směrnice lineární funkce dle vztahu:

$$a = \sqrt{\frac{2U}{\frac{e}{m}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m} = \frac{2U}{a^2} \tag{14}$$

Nejistoty měření

Vzhledem k tomu, že je obtížné posoudit oba druhy nejistot, výslednou kombinovanou nejistotu měření neurčujete. Omezte se pouze na porovnání naměřené hodnoty měrného náboje e/m s tabulkovou hodnotou:

$$\frac{e}{m} = (1{,}7588047 \pm 0{,}0000049) \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$$