Úloha 15

Rezonanční obvod

Nucené kmity a rezonance

Netlumené kmitání způsobuje síla daná výchylkou systému (např. kyvadla). Tato síla je přímo úměrná výchylce y a působí proti směru vychýlení. Platí pro ni

$$F = ma = -ky. \tag{1}$$

V případě, že v systému dochází k tlumení kmitů, tak je to vlivem odporové síly. Pro jednoduchost předpokládejme pomalý pohyb. Odporová síla tak bude přímo úměrná rychlosti ve tvaru $F_O = -Bv$ a působí proti směru pohybu. Pro celkovou sílu působící na systém pak bude platit

$$F = ma = -ky - Bv. \tag{2}$$

Takovýto systém bude tlumený vlivem odporové síly a bude se v čase snižovat jeho amplituda. Pro zachování amplitudy kmitů je třeba působit periodicky vnější silou. Jelikož kmity systému jsou harmonické budeme tak působit harmonicky se měnící vnější silou $F_V = F_0 \sin \omega t.$ Pro celkovou sílu působící na systém pak platí

$$F = ma = -ky - Bv + F_0 \sin \omega t. \tag{3}$$

Tuto sílu můžeme rozepsat pomocí výchylky

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - B\frac{dy}{dt} + F_0 \sin \omega t. \tag{4}$$

Dostali jsme diferenciální rovnici, kterou ještě dále upravíme a zavedeme substitucí nové veličiny

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{B}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin \omega t, \tag{5}$$

kde $2b = \frac{B}{m}$ je konstanta popisující útlum kmitů (b se nazývá součinitel útlumu), $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ je původní úhlová frekvence netlumených a nevynucených kmitů (tzv. vlastní kmity oscilátoru), ω je úhlová frekvence kmitů vnější síly a F_0 je amplituda vnější síly.

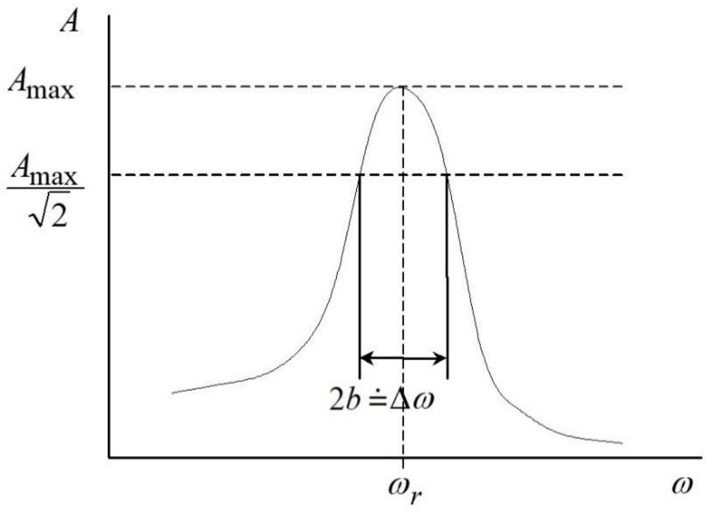
Vyřešení diferenciální rovnice nucených kmitů (5) je náročnější. Najdete ho ve skriptech z Fyziky I na str. 120. Skládá se ale ze dvou částí. První část řešení popisuje přechodný stav systému, který po určitém čase vymizí a druhá část řešení popisuje setrvalý stav systému. Budeme se zabývat pouze tímto setrvalým stavem, protože v našem měření přechodný stav vymizí prakticky okamžitě. Řešení pro setrvalý stav jsou harmonické kmity

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi\right). \tag{6}$$

Amplituda i fázový posuv závisí na parametrech systému a platí pro ně z řešení rovnice (5)

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}, \tag{7}$$

$$tg\varphi = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{8}$$



Obr. 1 Rezonanční křivka

Podíváme se blíže na závislost amplitudy na úhlové frekvenci vnější síly. **Pro určitou hodnotu úhlové frekvence je amplituda maximální** – tomuto jevu se říká **rezonance**. Na obr. 1 můžeme vidět závislost amplitudy A na úhlové frekvenci vnější síly ω, tzv. rezonanční křivku. Pro určitou úhlovou frekvenci ω_r vnější síly bude mít amplituda svoje maximum A_{max}. Tuto úhlovou frekvenci ω_r označujeme jako **rezonanční úhlovou frekvenci**. Maximum funkce $A = f\left(\omega\right)$ lze určit pomocí první derivace $\frac{dA}{d\omega} = 0.$ Výsledkem je, že pro rezonanční úhlovou frekvenci platí vztah (viz skripta z Fyziky I str. 121)

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}. \tag{9}$$

Podívejme se dále na to, co bude platit při malém tlumení, tedy za podmínky $b \ll \omega_0$. Rezonanční úhlová frekvence je pak $\omega_r \doteq \omega_0$ a pro hodnotu A_{max} vychází

$$A_{max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + 4b^2\omega_0^2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2b\omega_0} = \frac{F_0}{2b\omega_0 m}. \tag{10}$$

Pro úplnější popis charakteristiky rezonanční křivky se zavádí ještě veličina **činitel jakosti** Q. Hodnota činitele jakosti vyplývá z úvah o přeměnách energie oscilátoru s tlumením a zahrnuje v jedné fyzikální veličině jak úhlovou frekvenci vlastního kmitání oscilátoru ω_0, tak součinitel útlumu b. Činitel jakosti je těsně spjat s tvarem rezonanční křivky: 1. s výškou rezonanční křivky, 2. se šířkou rezonanční křivky.

1. Výška rezonanční křivky odpovídá maximální amplitudě A_{max}. Definice činitele jakosti je poměr amplitud při rezonanci a při nulové úhlové frekvenci ($\omega = 0$) vnější síly (tedy při žádné vnější síle)

$$Q = \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{\frac{F_0}{2b\omega_0 m}}{\frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{F_0}{2b\omega_0 m}}{\frac{F_0}{m\omega_0^2}} = \frac{\frac{F_0}{2b\omega_0 m}}{\frac{F_0}{k}} = \frac{k}{m}\frac{1}{2b\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{2b\omega_0} = \frac{\omega_0}{2b}. \tag{11}$$

Činitel jakosti je tedy v podstatě zesilovací činitel oscilátoru. Určuje, kolikrát větší je amplituda kmitů při rezonanci než amplituda vlastních kmitů oscilátoru.

2. Činitel jakosti také charakterizuje ztráty energie oscilátoru způsobené tlumením. Pro výpočet činitele jakosti lze zvolit i zmenšení maximální energie E_{max} při rezonanci na poloviční hodnotu $E_{max}/2$. Vzhledem ke tvaru rezonanční křivky může mít oscilátor poloviční energii pro dvě různé úhlové frekvence $\omega_1 < \omega_0$ a $\omega_2 > \omega_0$. Pro maximální energii oscilátoru při rezonanci platí $E_{max} = \frac{1}{2}kA_{max}^2$ a z poloviční energie lze odvodit příslušnou amplitudu A_{12} při úhlových frekvencích ω_1 a ω_2

$$E_{12} = \frac{1}{2}kA_{12}^2 = \frac{E_{max}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}kA_{max}^2 \quad \rightarrow \quad A_{12} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Při malém tlumení je rezonanční křivka strmá v okolí rezonanční frekvence a úhlové frekvence ω_1 a ω_2 se tak příliš neodlišují od rezonanční frekvence a platí $\omega_{12} = \omega_1 = \omega_2 \approx \omega_0$. Hodnotu součinitele tlumení b určíme z odmocniny ve vztahu (10). Víme, že platí $A_{12} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$, a tak platí i

$$A_{12} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{12}{}^2\right)^2 + 4b^2\omega_{12}^2}} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{2}\cdot 2b\omega_0} \tag{13}$$

a odtud dostaneme pro odmocninu z rovnosti jmenovatelů vztah

$$\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{12}{}^2\right)^2+4b^2\omega_{12}^2}=\sqrt{2}\cdot 2b\omega_0. \tag{14}$$

Odtud dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2-\omega_{12}{}^2\right)^2+4b^2\omega_{12}^2&=8b^2\omega_0^2\\ \left(\omega_0^2-\omega_{12}{}^2\right)^2&=4b^2\omega_0^2\\ \left[\left(\omega_0+\omega_{12}\right)\left(\omega_0-\omega_{12}\right)\right]^2&=4b^2\omega_0^2\\ \left(\omega_0+\omega_{12}\right)\left(\omega_0-\omega_{12}\right)&=2b\omega_0.\end{aligned} \tag{15}$$

A dále upravíme s použitím $\omega_0+\omega_{12}\doteq 2\omega_0$ a $\omega_0-\omega_{12}\doteq\frac{\Delta\omega}{2}$

$$\begin{aligned}2\omega_0\frac{\Delta\omega}{2}&\doteq 2b\omega_0\\ b&\doteq\frac{\Delta\omega}{2},\end{aligned} \tag{16}$$

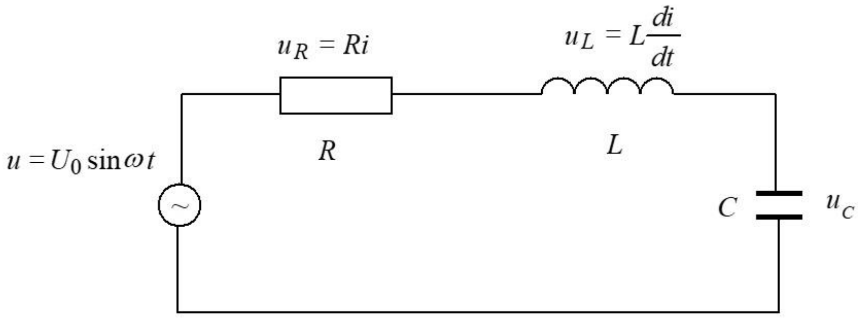
kde $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1\doteq 2b.$ Ze šířky rezonanční křivky ve výšce $A_{12}=\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$ lze tak experimentálně určit součinitel tlumení $b.$ Ten je přibližně roven polovině šířky rezonanční křivky v této výšce. Pro činitel jakosti tak dostáváme

$$Q=\frac{\omega_0}{2b}\doteq\frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \tag{17}$$

Část textu o nuceném kmitání je převzata z [1], kde lze nalézt úplný popis tohoto tématu.

Rezonanční obvod

Sériový rezonanční obvod získáme sériovým spojením cívky o indukčnosti $L,$ kondenzátoru o kapacitě C a rezistoru o odporu R podle obr. 2.



Obr. 2 Sériový rezonanční obvod

Zdroj dodává do obvodu střídavé napětí $u = U_0 \sin \omega t$. Na rezistoru je napětí $u_R = Ri.$ Na cívce se indukuje napětí $u_L = -L\dfrac{di}{dt}.$ Na kondenzátoru je napětí $u_C = \dfrac{q}{C}.$ Pokud je kondenzátor nabit nábojem q, tak z něj začne tekoucím proudem odcházet. Tento proud bude mít kladné znaménko. Zároveň ale klesá náboj na kondenzátoru a pro proud tak bude platit $i = -\dfrac{dq}{dt}.$ Cívku, kondenzátor a střídavý zdroj považujeme z hlediska 2. Kirchhoffova zákona za zdroje napětí. Pro okamžitá napětí v obvodu tak platí

$$u_R = u_L + u_C + u \quad \rightarrow \quad Ri = -L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + U_0 \sin \omega t. \tag{18}$$

Po dosazení za proud dostaneme rovnici ve tvaru

$$-R\frac{dq}{dt} = +L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + U_0 \sin \omega t \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -U_0 \sin \omega t. \tag{19}$$

Dále dosadíme za náboj $q = Cu_C$.

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = -U_0 \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = -\frac{U_0}{LC}\sin \omega t \tag{20}$$

Rovnici, kterou jsme obdrželi pro nucené kmity napětí na kondenzátoru v sériovém RLC obvodu, porovnáme s rovnicí obecných nucených kmitů

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = -\frac{U_0}{LC}\sin \omega t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + 2b\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = -\omega_0^2 U_0 \sin \omega t \tag{21}$$

Porovnáním rovnic dostáváme pro úhlovou frekvenci vlastních kmitů ω_0 vztah, který se nazývá **Thomsonův vztah** $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.$ Pro součinitel útlumu platí $2b = \dfrac{R}{L}.$ A pro amplitudu napětí na kondenzátoru platí

$$U_{0C} = \frac{\omega_0^2 U_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}} = \frac{\dfrac{U_0}{\omega C}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}. \tag{22}$$

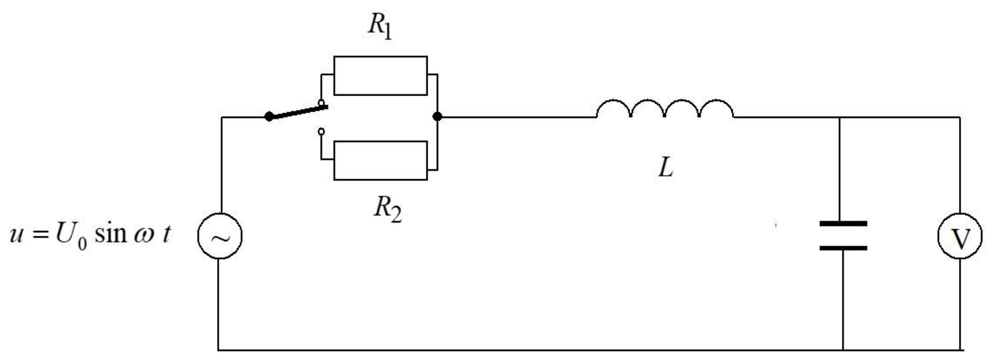
Činitel jakosti Q pak můžeme určit ze vztahu

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{23}$$

Všechny uvedené vztahy popisují obvod složený z ideálních prvků RLC. Reálný obvod má vedle ztrát na rezistoru R navíc ztráty v nedokonalé indukčnosti a kapacitě. Přesto můžeme obvod popsat výše uvedenými vztahy, musíme však uvažovat zdánlivý odpor ztrátový $R_{ztr} > R$. Odpor R_{ztr} určíme ze vztahu (23).

Zadání:

1) Změřte a graficky znázorněte rezonanční křivky sériového RLC obvodu pro dvě hodnoty odporu R_1 a R_2 při pevné hodnotě kapacity laditelného kondenzátoru. Graf zpracujte počítačovou regresí.
2) Spočtěte indukčnost L cívky a porovnejte ji s hodnotou získanou počítačovou regresí.
3) Z rezonanční křivky stanovte v obou případech činitel jakosti Q.
4) Určete ztrátový odpor R_{ztr}. Porovnejte jeho hodnotu s odporem získaným počítačovou regresí rezonanční křivky.
5) Určete součinitel tlumení b a úhlovou frekvenci vlastních kmitů ω_0. Porovnejte ω_r a ω_0.
6) Změřte substituční metodou a multimetrem kapacitu jednoho neznámého kondenzátoru.



Obr. 3 – schéma zapojení RLC obvodu

Schéma zapojení RLC obvodu je uvedeno na obr. 3. Kapacitu C tvoří kondenzátor s nastavitelnou kapacitou a dva přepínatelné rezistory s odpory R_1 a R_2. Zdrojem napětí je generátor napětí harmonického průběhu s konstantní amplitudou U_0, jehož frekvenci nastavujeme na zdroji a vidíme na displeji její hodnotu. Voltmetrem měříme amplitudu napětí U_{0C} na kondenzátoru v závislosti na frekvenci zdroje f. Mezi voltmetrem a kondenzátorem je připojen usměrňovač, který usměrní střídavé napětí na jeho amplitudu. Tu pak měříme voltmetrem nastaveným na měření stejnosměrného napětí.

Měření

1) Pro změření rezonanční křivky budeme měřit závislost amplitudy napětí na kondenzátoru na frekvenci napětí střídavého zdroje $U_{0C} = U_{0C}(f)$. Nejprve si změnou hodnot frekvence najdeme zhruba rezonanční frekvenci (největší napětí na kondenzátoru). Poté budeme na obě strany proměřovat rezonanční křivku tak, abychom ji rovnoměrně pokryli změřenými body na obou stranách. Změřte 10–15 hodnot na každé straně křivky, tedy celkem 20–30 hodnot. Jako krok pro měření si vezměte pokles napětí zhruba každých 0,2 V a zaznamenejte napětí i příslušnou frekvenci.
   Měření budete provádět naráz pro oba rezistory R_1 a R_2. Přepínačem v obvodu si při dané frekvenci přepnete z jednoho rezistoru na druhý a zaznamenáte hodnoty napětí na kondenzátoru pro oba připojené rezistory. Vlivem přerozdělení napětí v obvodu pro různé odpory se při jeho změně změní i napětí na kondenzátoru.
   Změřené hodnoty napětí a frekvence zanesete pro obě křivky do počítačového programu na jejich vykreslení. Do programu zadáte i hodnotu zvolené kapacity na laditelném kondenzátoru. Z tohoto programu fitováním rezonanční křivky na dané body získáte hodnoty parametrů U_0, R a L. Program vám poskytne i hodnoty rezonanční frekvence f_r a šířku rezonanční křivky Δf. Nezapomeňte na jejich přepočtení na úhlovou frekvenci $\omega = 2\pi f$ a $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ pro další výpočty. Proces provedete pro obě křivky a vytisknete si na tiskárně graf rezonančních křivek.
2) Z Thomsonova vztahu $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ spočítáte indukčnost cívky. Využijete znalosti $\omega_r \doteq \omega_0$.
   Spočtenou indukčnost porovnáte s hodnotou z regrese křivky.
3) Činitel jakosti spočítáte ze vztahu $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ použitím hodnot z regrese.
4) Na základě spočtených hodnot L a Q určíte ztrátový odpor ze vztahu $R_{ztr} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
   Spočtený odpor porovnáte s hodnotou z regrese křivky.
5) Součinitel tlumení určíte ze vztahu $2b = \frac{R}{L}$. Úhlovou frekvenci vlastních kmitů určíte ze vztahu $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$. Porovnáte hodnoty ω_r a ω_0.

6) Laditelný kondenzátor umožňuje v daném rezonančním obvodu měřit kapacitu **substituční metodou**. Tato metoda spočívá v zapojení kondenzátoru o neznámé kapacitě do obvodu namísto laditelného kondenzátoru. Potom nalezneme (změnou frekvence zdroje) rezonanční frekvenci neznámého kondenzátoru.
   Zapojíme zpět laditelný kondenzátor (ponecháme nalezenou frekvenci konstantní) a pomocí změny kapacity naladíme opět rezonanci. Ze stupnice laditelného kondenzátoru pak odečteme kapacitu neznámého kondenzátoru. Tato kapacita je kapacitou neznámého kondenzátoru.
   Hodnotu kapacity neznámého kondenzátoru pak určete i multimetrem. Porovnejte získané hodnoty jeho kapacity.

V závěru vaší sepsané laboratorní práce proveďte diskuzi porovnání naměřených hodnot a fyzikální význam odlišnosti či blízkosti získaných hodnot. Nezapomeňte porovnat i změřenou kapacitu substituční metodou a multimetrem.

Nejistoty měření

Nejistotu měření vlivem složitosti v této úloze nestanovujeme.

Literatura

[1] Lepil O., Rezonanční křivka – portrét oscilátoru, Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 29, č. 3, s. 201–213, srp. 2020.