Úloha 13

Stanovení momentu setrvačnosti torzním kyvadlem

Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J charakterizuje vlastnosti tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy. V případě, že hmota tělesa je rozložena spojitě, definujeme moment setrvačnosti vztahem:

$$J = \int_M r^2 dm , \qquad (1)$$

kde dm je element hmotnosti tělesa, r je vzdálenost tohoto elementu od osy rotace. Integraci provádíme přes celou hmotnost M .

Tab. 1 Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose symetrie

Těleso	Moment setrvačnosti
Plný válec	$J = \frac{1}{2} m r^2$
Dutý válec	$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$

Deformace zkroucením (torze)

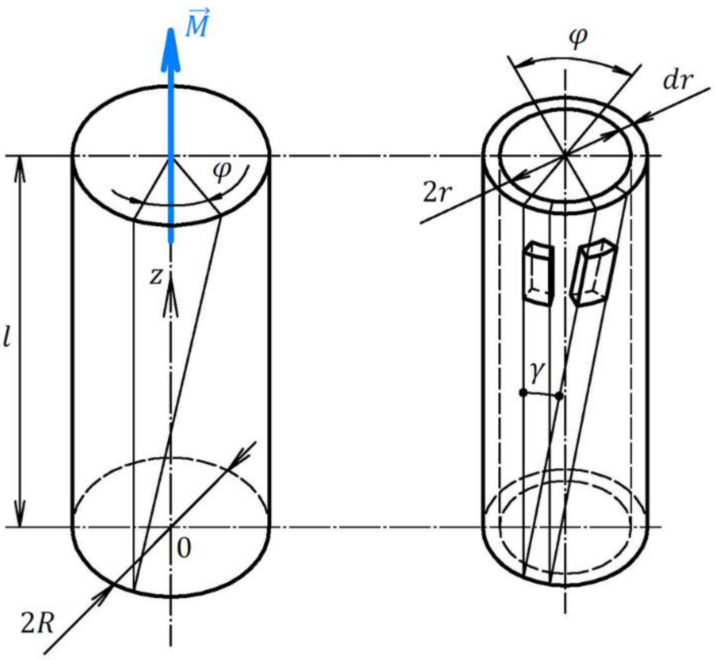
Modul pružnosti ve smyku (torze) se uplatňuje při zkrucování (torzi) tyčí. Uvažujme přímou válcovou tyč (přímý kruhový válec) o poloměru R a délce l, jejíž jeden konec je (nepohyblivě) upevněn a na jejím druhém konci silová dvojice vyvolává **krouticí moment** $\vec{M}$ ve směru osy tyče (obr. 1). Jiné silové působení neuvažujeme.

Deformace tyče se projevuje pootočením každého příčného průřezu tyče (mimo upevněnou základnu). Přitom předpokládáme, že i při deformaci tyče zůstává každý její příčný průřez rovinným.

Vybereme-li z tyče elementární válcovou vrstvu o poloměru $r < R$ a tloušťce dr, vidíme, že původně kolmý elementární hranolek, omezený dvěma povrchovými přímkami, se při zkrucování tyče deformuje jako hranolek na obr. 1. Zkroutí-li se tyč délky l na volném konci o úhel φ, pak pro zkos γ platí : $\gamma = \frac{r\varphi}{l}$.

Tento zkos vzniká tečným napětím τ a platí:

$$\tau = G\gamma = G\frac{r\varphi}{l} . \qquad (2)$$



Obr. 1

Konstanta G je **modul pružnosti ve smyku** (modul torze). Je to konstanta daného materiálu a má stejnou jednotku jako napětí $[G] = \mathrm{N\,.\,m^{-2}} = \mathrm{Pa}$ (pascal).
Tečné napětí τ na mezikruží poloměru r a tloušťky dr je dáno podílem tečné síly dF a plochy mezikruží $dS = 2\pi\, r dr$

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2\pi r dr} = \frac{G\, r\, \varphi}{l} \Rightarrow dF = \frac{2\pi G\, r^2\, \varphi}{l} dr \qquad (3)$$

Tečná síla dF má vzhledem k ose tyče elementární moment dM a po dosazení z (3) dostaneme

$$dM = r dF \sin 90° = \frac{2\pi\, G\varphi}{l} r^3 d\,r. \qquad (4)$$

Tuto rovnici integrujeme v mezích od $r = 0$ do $r = R$ a dostaneme vztah mezi krouticím momentem M a zkroucením tyče φ ve tvaru

$$M = \int_0^R \frac{2\pi\, G\varphi}{l} r^3 d\,r = \frac{\pi\, G\, R^4}{2\, l} \varphi \quad .$$

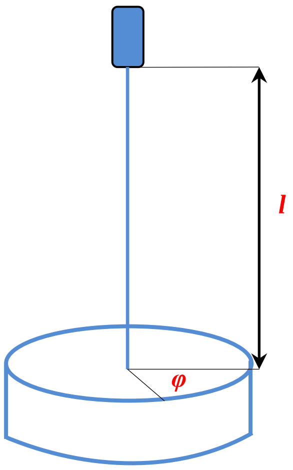
Tento výsledek se často uvádí ve tvaru

$$M = K\varphi, \quad \text{kde} \quad \boxed{K = \frac{\pi\, G\, R^4}{2 l}} \qquad (5)$$

Konstanta úměrnosti K se nazývá **torzní tuhost** tělesa.

Torzní kyvadlo

Moment setrvačnosti lze určit výpočtem z definičního vztahu (1) pouze v případě tělesa, které má jednoduchý pravidelný tvar. U těles, která sice jsou homogenní, ale nemají pravidelný geometrický tvar, nelze tento výpočet provést. V takovém případě lze použít níže popsanou metodu, která je vhodná ke stanovení momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm. V bodě osy, vzhledem k níž moment setrvačnosti stanovujeme, zavěsíme těleso na ocelový drát, tedy tato osa splyne s osou drátu. Pootočíme-li poté těleso kolem osy, bude po uvolnění konat torzní kmity, popsané pohybovou rovnicí (2) pro **torzní kyvadlo** (obr. 1).



Obr. 1 Torzní kyvadlo,

Pohybová rovnice má tvar

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi\,, \tag{6}$$

kde φ je úhel odpovídající zkroucení drátu a J je měřený moment setrvačnosti, K je konstanta (5)

Úpravou rovnice (6) dostaneme diferenciální rovnici harmonického pohybu (analogie kmitání tělesa na pružině)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{K}{J}\varphi = 0\,, \tag{7}$$

kde $\frac{K}{J} = \omega^2$ a současně $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde T je doba kmitu (perioda) a pro **dobu kyvu torzního kyvadla** tedy platí

$$\tau = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{J}{K}}\,. \tag{8}$$

Hledaný moment setrvačnosti je možné vypočítat z rovnice (4). To by však vyžadovalo změřit nejen dobu kyvu τ, ale i konstantu K, tedy podle vztahu (5) změřit poloměr r, délku l drátu a určit G. Často však není známo zcela přesně z jakého materiálu je použitý drát vyroben, nelze tedy určit z tabulek jeho modul pružnosti ve smyku G. Proto je výhodnější volit postup, kdy nemusíme počítat s konstantou K.

Zadání:

1) Změřte dobu kyvu torzního kyvadla τ pro dané těleso a dobu kyvu τ' pro totéž těleso spojené s pomocným tělesem.
2) Vypočtěte moment setrvačnosti J_1 pomocného tělesa vzhledem k ose symetrie.
3) Stanovte moment setrvačnosti J daného tělesa pomocí doby kyvu torzního kyvadla.
4) Určete modul pružnosti ve smyku G materiálu drátu.

Teorie

Změříme dobu kyvu τ tělesa, jehož moment setrvačnosti stanovujeme. Potom k tělesu souměrně s osou drátu připojíme další pomocné těleso, jehož moment setrvačnosti J_1 známe. Určíme dobu kyvu τ' takto vzniklé soustavy. Pro podíl dob kyvů τ, τ' pak na základě vztahu (8) platí

$$\frac{\tau}{\tau'} = \sqrt{\frac{J}{J + J_1}}\,. \tag{9}$$

Moment setrvačnosti J tedy můžeme vyjádřit takto

$$J = \frac{J_1}{\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 - 1}\,. \tag{10}$$

Modul ve smyku G materiálu, z něhož je vyroben závěsný drát, určíme na základě znalosti parametrů drátu, momentu setrvačnosti J a doby kyvu τ torzních kmitů soustavy. Ze vztahu (5) a (8) vyplývá

$$\boxed{G = \frac{2\pi l J}{r^4 \tau^2}\,.} \tag{11}$$

Měření

- Jako pomocné těleso zvolte kruhový prstenec hmotnosti m s vnitřním průměrem d_1 a s vnějším průměrem d_2. Rozměry pomocného tělesa změřte, hmotnost určete vážením. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm pro těleso tohoto tvaru je dán výrazem

$$J_1 = \frac{1}{8} m\left(d_1^2 + d_2^2\right). \qquad (12)$$

- Doby kyvů torzních kmitů měřte metodou následných měření pomocí počítače.

Nejistoty měření

- **Pro nejistotu typu A momentu setrvačnosti** J, která je určena aplikací obecného vztahu pro šíření nejistot (text "Nejistoty nepřímého měření", vztah (3)) na vztah (10), platí:

$$u_{JA} = 2J_1 \frac{\tau'}{\tau^2} \frac{1}{\left[\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2} \sqrt{\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 u_{\tau A}^2 + u_{\tau' A}^2}\,, \qquad (13)$$

kde nejistota typu A dob kyvů je rovna nejistotě směrnic z programu na PC. Ostatní veličiny byly měřeny jen jednou, a tedy nemají nejistotu typu A.

- **Pro nejistotu typu B momentu setrvačnosti** J bude podle (10) platit:

$$u_{rJB} = u_{rJ_1B}$$

Pro určení nejprve absolutní a poté relativní nejistoty momentu setrvačnosti J_1 aplikujeme vztah (3) text "Nejistoty nepřímého měření" na rovnici (12). Protože nejistota vnějšího a vnitřního průměru bude stejná (stejné měřidlo), platí:

$$u_{rJB} = u_{rJ_1B} = \sqrt{u_{rm}^2 + \frac{4}{d_1^2 + d_2^2} u_d^2} \qquad (14)$$

- **Nejistota modulu pružnosti ve smyku** G je složena z nejistoty typu A, která se vztahuje k měření doby kyvu (nejistotu typu A průměru drátu zanedbejme), a z nejistoty typu B, kde zdroji nejistot jsou přímo měřené veličiny l, J, r.

Pro nejistotu typu A lze ze vztahu (11) pro stanovení nejistoty nepřímo měřené veličiny ve tvaru součinu a podílu odvodit

$$u_{rGA} = \sqrt{u_{rJA}^2 + 4u_{r\tau A}^2}\,. \qquad (15)$$

Podobně dostaneme pro nejistotu typu B výraz

$$u_{rGB} = \sqrt{u_{rJB}^2 + u_{rlB}^2 + 16u_{rrB}^2}\,. \qquad (16)$$