Nejistoty nepřímého měření

Chceme-li určit nejistotu fyzikální veličiny y, kterou měříme nepřímo, tak musíme využít fyzikálního vztahu její závislosti na měřených veličinách $x_1,.......,x_n$. Na tento fyzikální vztah můžeme nahlížet jako na funkci více proměnných $y = f\left(x_1,.......,x_n\right)$. Pokud bychom chtěli určit, jak závisí malá změna ve funkční hodnotě y na malé změně měřených proměnných $x_1,.......,x_n$, tak takovouto změnu popisuje totální diferenciál

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n. \tag{1}$$

Na nejistotu měření můžeme nahlížet jako na malou změnu v dané fyzikální veličině, a tudíž $u_y = dy$ a $u_{x_i} = dx_i$, kde $i = 1,.....,n.$ Tento vztah se někdy používá pro zjednodušený výpočet nejistot měření. Není však úplně správný.

Ze statistiky vyplývá, že nejistoty se neskládají lineárně, ale kvadraticky, a platí tak

$$\left(dy\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \left(dx_1\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \left(dx_n\right)^2. \tag{2}$$

Tento vztah je náročnější odvodit, ale jeho použití není náročné, pokud známe derivace. Pokud dosadíme za malé změny veličin jejich nejistoty, dostaneme konečný tvar pro nejistotu

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 u_{x_n}^2}. \tag{3}$$

Tomuto vztahu se říká **zákon šíření chyb (nejistot)**.

Většinu fyzikálních vztahů můžeme popsat pomocí dvou důležitých funkcí. Podíváme se, co ze zákona šíření chyb vyjde pro nejistoty těchto dvou funkcí.

1. Funkce $y = ax_1 + bx_2$

   Pro výpočet nejistoty je třeba určit derivace funkce podle jejích proměnných, tedy

   $\frac{\partial y}{\partial x_1} = a$ a $\frac{\partial y}{\partial x_2} = b.$ Tyto derivace dosadíme do vztahu (3) a dostaneme pro nejistotu

$$u_y = \sqrt{a^2 u_{x_1}^2 + b^2 u_{x_2}^2}. \tag{4}$$

2. Funkce $y = ax_1^m x_2^n$

   Pro výpočet nejistoty je třeba určit derivace funkce podle jejích proměnných, tedy

$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = amx_1^{m-1}x_2^n$ a $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = anx_1^m x_2^{n-1}$. Tyto derivace dosadíme do vztahu (3) a dostaneme pro nejistotu

$$
\begin{aligned}
u_y &= \sqrt{\left(amx_1^{m-1}x_2^n\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(anx_1^m x_2^{n-1}\right)^2 u_{x_2}^2} \\
u_y &= \sqrt{a^2m^2x_1^{2m-2}x_2^{2n}u_{x_1}^2 + a^2n^2x_1^{2m}x_2^{2n-2}u_{x_2}^2} \\
u_y &= ax_1^m x_2^n \sqrt{m^2x_1^{-2}u_{x_1}^2 + n^2x_2^{-2}u_{x_2}^2} \\
\frac{u_y}{ax_1^m x_2^n} &= \sqrt{m^2\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2} + n^2\frac{u_{x_2}^2}{x_2^2}} \\
\frac{u_y}{y} &= \sqrt{m^2\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2} + n^2\frac{u_{x_2}^2}{x_2^2}} \\
u_{ry} &= \sqrt{m^2u_{rx_1}^2 + n^2u_{rx_2}^2}
\end{aligned}
\quad , \tag{5}
$$

kde jsme použili definici relativní nejistoty $u_{ry} = \dfrac{u_y}{y}$.

Příklad: Určete odpor spotřebiče a jeho nejistotu z jednoho měření proudu a napětí. Hodnota proudu je $I = (99,78 \pm 0,28)$ mA a napětí $U = (238,9 \pm 1,1)$ V.

Z Ohmova zákona pro odpor spotřebiče platí $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{238,9}{0,09978} = 2394,27\ \Omega$.

1. Nejistoty s pomocí derivací

   Odpor je funkcí napětí a proudu. $R = f(U, I)$. Je tak třeba spočítat derivace odporu podle jeho proměnných

   $\dfrac{\partial R}{\partial U} = \dfrac{1}{I}$ a $\dfrac{\partial R}{\partial I} = -\dfrac{U}{I^2}$. Tyto derivace dosadíme do vztahu (3) a dostaneme pro nejistotu

$$
\begin{aligned}
u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u_I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_U^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 u_I^2} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{0,09978^2}\cdot 1,1^2 + \frac{238,9^2}{0,09978^4}\cdot 0,00028^2} = \sqrt{121,534 + 45,141} \approx 13\ \Omega.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. Nejistoty bez derivací

   Odpor je dán vydělením napětí a proudu, a použijeme tak k výpočtu jeho nejistoty vztah (5) pro funkci $y = ax_1^m x_2^n$

$$u_{rR} = \sqrt{1^2 u_{rU}^2 + (-1)^2 u_{rI}^2} = \sqrt{\frac{u_U^2}{U^2} + \frac{u_I^2}{I^2}} = \sqrt{\frac{1,1^2}{238,9^3} + \frac{0,28^2}{99,78^2}} = \\ \sqrt{0,000021201 + 0,000007875} = 0,005392 \tag{7}$$

a pro absolutní nejistotu odporu pak platí $u_R = u_{rR} R = 0,005392 \cdot 2394,27 \doteq 13\ \Omega$.

V obou případech tak dostáváme stejný číselný výsledek pro odpor $R = (2\ 394 \pm 13)\ \Omega$.

Příklad: Určete objem krychle a jeho nejistotu. Hrana krychle byla jednou měřena posuvným měřítkem a je $a = 2,715$ cm.

Objem krychle je $V = a^3 = 2,715^3 = 20,0128\ \mathrm{cm}^3$.

Derivace objemu podle hrany krychle je $\frac{\partial V}{\partial a} = 3a^2$ a nejistota hrany je $u_a = \frac{m_a}{\sqrt{3}} = \frac{0,005}{\sqrt{3}}$ cm.

Pro nejistotu objemu pak platí ze vztahu (3)

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 u_a^2} = \frac{\partial V}{\partial a} u_a = 3a^2 u_a = 3 \cdot 2,715^2 \cdot \frac{0,005}{\sqrt{3}} \doteq 0,064\ \mathrm{cm}^3. \tag{8}$$

A výsledný objem je $V = (20,013 \pm 0,064)\ \mathrm{cm}^3$.

Příklad: Určete obecný vztah pro nejistotu funkce $\omega = \sqrt{\Omega^2 - 2b^2}$.

Vztah nesedí na žádnou z našich funkcí a použijeme tak obecný postup pomocí derivací ze vztahu (3). Spočítáme si derivace podle obou proměnných

$$\frac{\partial \omega}{\partial \Omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \omega}{\partial b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4b}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}} = \frac{-2b}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}} \tag{9}$$

a dosadíme je do vztahu (3)

$$u_\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \Omega}\right)^2 u_\Omega^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial b}\right)^2 u_b^2} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 2b^2} u_\Omega^2 + \frac{4b^2}{\Omega^2 - 2b^2} u_b^2}. \tag{10}$$