Úloha 4

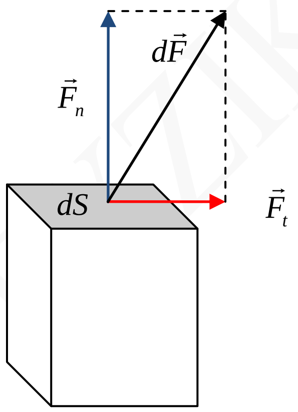
Stanovení modulu pružnosti z prodloužení drátu

Pružnost pevných těles

Tělesa pevného skupenství ve skutečnosti nejsou dokonale tuhá, jak se předpokládá např. v mechanice, ale pod vlivem působení vnějších sil mění svůj tvar - deformují se. O tomto chování těles (obecně všech látek) pojednává nauka o pružnosti. Úkolem nauky o pružnosti je zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, která v tělesech vyvolávají vnější síly. Napětí je veličina charakterizující působení síly v daném místě tělesa na elementární plochu, tedy

$$\sigma = \frac{dF}{dS}. \tag{1}$$

Jednotkou napětí je $[\sigma] = \mathrm{N.m^{-2}} = \mathrm{Pa}$. Rozložením síly do směru tečného a normálového k ploše dS získáme tečnou a normálovou složku síly a tedy i jim odpovídající tečné napětí a normálové napětí (obr.1). Normálové napětí značíme σ a tečné τ.



Obr. 1 Rozložení síly

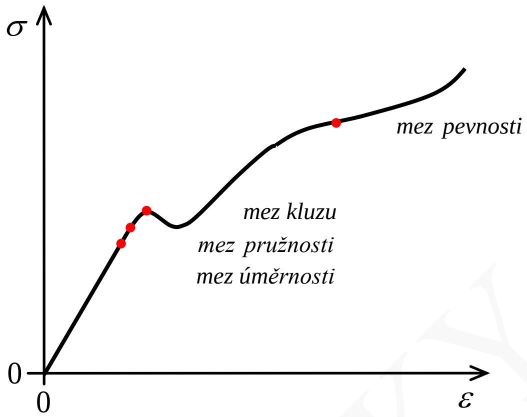
Deformace charakterizuje změna tvaru tělesa, změna vzdáleností částic tělesa. Deformace může být elastická (vratná), plastická (nevratná). Závislost mezi **elastickou deformací** a normálovým napětím pro jednorozměrný případ popisuje Hookův zákon pro tah, tlak:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2}$$

kde σ je normálové napětí, ε je relativní prodloužení tyče a E je konstanta úměrnosti. Relativní prodloužení je definováno jako poměr prodloužení tyče a původní délky tedy:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{3}$$

Na obr. 2 je vidět graf závislosti normálového napětí na relativním prodloužení při namáhání tělesa tahem. Platnost Hookova zákona je oblast lineární závislosti do meze úměrnosti, kdy se jedná o elastickou deformaci. Relativní prodloužení je bezrozměrná veličina. Konstanta úměrnosti E se nazývá Youngův modul pružnosti a je jednou ze základních materiálových konstant. Její jednotkou je $[E] = \mathrm{Pa}$. Pro některé materiály jsou hodnoty Youngova modulu pružnosti uvedeny v tab. 1. Hookův zákon platí pro namáhání tahem i tlakem. Některé materiály, jako např. litina a beton, vykazují rozdílné chování při namáhání v tahu a tlaku.



Obr. 2 Graf závislosti normálového napětí na relativním prodloužení při namáhání tělesa tahem

Tab.1. Youngův modul pro některé materiály.

Materiál	**Modul pružnosti v tahu *E* [Pa]**
ocel	$2{,}1.10^{11}$
hliník	$(6{,}6-6{,}8).10^{10}$
měď	$(1{,}2-1{,}3).10^{11}$
mosaz	$(1{,}0-1{,}7).10^{11}$
dural	$7{,}2.10^{10}$

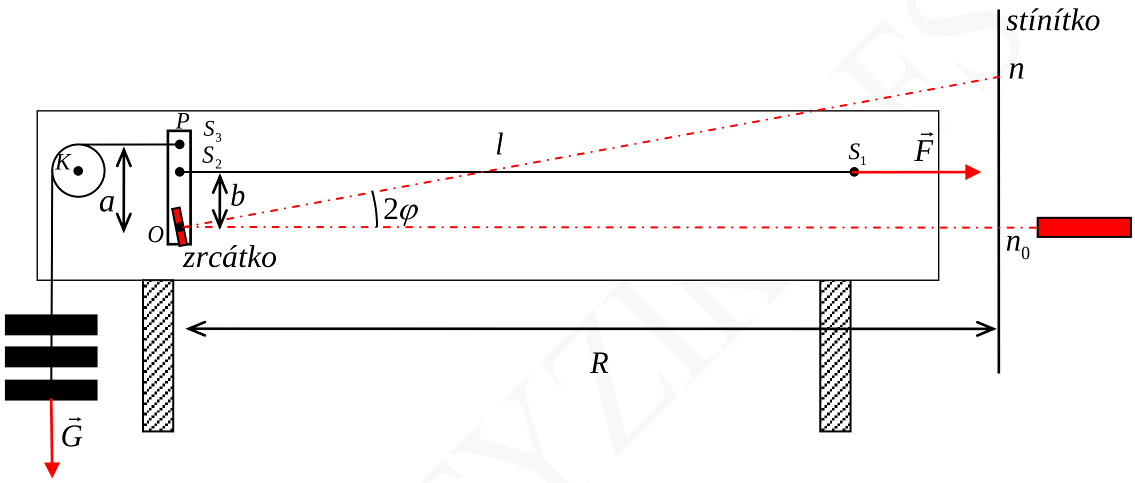
Dosazením ze vztahu (1) a (3) do Hookova zákona (2) tak dostaneme:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} \qquad (4)$$

K určení modulu pružnosti v tahu materiálu drátů, vláken a tenkých tyčí lze použít přímou metodu, při níž vyvoláváme definované napětí a zjišťujeme vzniklou deformaci. Nejdříve zjistíme počáteční délku tyče l_0 a plochu průřezu S a dále sledujeme závislost prodloužení Δl na působící síle F. Malé změny průřezu při protažení tyče zanedbáváme. V oblasti, kde je deformace úměrná napětí, tj. pro relativní prodloužení maximálně 1-2 %, je velikost prodloužení poměrně malá. Ke stanovení těchto malých změn délky se používají některé speciální metody a zařízení, v našem případě použijeme zrcátkovou metodu viz. dodatek 1.

Pro měření modulu pružnosti materiálu silnějších tyčí jsou určeny trhací stroje, které dokáží vyvinout dostatečně velkou sílu. Nepřímou metodou určení modulu pružnosti v tahu je určení E z rychlosti šíření podélných akustických vln materiálem. Pro vzorky malých rozměrů je třeba užít ultrazvukových vln.

Další v praxi používaná metoda spočívá v určení velikosti průhybu tyče, na kterou působí síla známé velikosti. Jestliže můžeme předpokládat, že při ohybu je tyč namáhána pouze tahem a tlakem, lze ze vztahu mezi silou a velikostí průhybu stanovit modul pružnosti E. Konkrétní tvar takového vztahu závisí na tvaru průřezu tyče a jejím upevnění. Popsaná metoda se uplatňuje zejména u vzorků většího průřezu.



Obr. 3 Zrcátková metoda

Zadání:

1) Stanovte modul pružnosti v tahu materiálu drátu zrcátkovou metodou včetně jeho nejistoty. Získanou hodnotu porovnejte s teoretickou hodnotou.

2) Sestrojte graf závislosti polohy světelné stopy na stupnici n_i na tíhové síle G_i zatěžující drát.

Teorie:

Stanovení modulu pružnosti v tahu v naší úloze provedeme pomocí zrcátkové metody vycházející z platnosti vztahu (4) pro malá prodloužení (Dodatek 1 na konci textu). Jeden konec měřeného drátu je svorkou S_1 připevněn k tuhému ocelovému trámci a druhý konec drátu je svorkou S_2 připevněn k otočné páčce P ve vzdálenosti b od její osy otáčení O. Na závěsu připevněném k S_3 vedeném přes kladku je zavěšeno závaží, jehož tíha G působí přes kladku kolmo na páčku P ve vzdálenosti a od její osy otáčení. Při rovnováze na páčce P bude platit

$$Ga = Fb, \tag{5}$$

kde F je velikost síly vyvolané působením tíhy závaží v drátu. Síla velikosti F vyvolá prodloužení drátu $\Delta l = l - l_0$ a důsledkem je pootočení páčky o úhel φ, pro který platí s dostatečnou přesností vztah

$$\Delta l = l - l_0 = b\varphi . \tag{6}$$

Úhel pootočení měříme zrcátkovou metodou. Světelnou stopu značkové lampy po odrazu od zrcátka zachytíme na stupnici ve vzdálenosti R. Z principu zrcátkové metody (dodatek 1) vyplývá, že

$$\Delta l = b\frac{\Delta n}{2R}, \tag{7}$$

kde $\Delta n = n - n_0$ je posun světelné stopy na stupnici vyvolaný pootočením zrcátka o úhel φ. Po dosazení do obecného vztahu (4) dostaneme relaci pro určení E

$$E = \frac{2Rl_0 a}{Sb^2}\frac{G}{\Delta n}. \tag{8}$$

Měření provádíme tak, že drát nejprve napneme a vyrovnáme pomocí závaží určité tíhy. Odpovídající poloha světelné stopy je n_0. Potom přidáváme jednotlivá závaží tíhy G_i, kterým bude odpovídat poloha n_i světelné stopy na stupnici. Vztah (8) můžeme přepsat do tvaru

$$\boxed{E = \frac{2Rl_0 a}{Sb^2}\frac{1}{K},} \tag{9}$$

kde K získáme vyhodnocením naměřené závislosti $n = f(G)$. Konstanta K je směrnicí obecné přímky $n_i = n_0 + KG_i$. Při výpočtu E ze vztahu (9) dosadíme za a, b hodnoty

$$a = (85,0 \pm 0,5)\ \text{mm}$$
$$b = (45,0 \pm 0,5)\ \text{mm}.$$

Obr. 4 Měřicí zařízení

Měření:

- Nejdříve zvažte jednotlivá závaží (m_i), dále určete délku (l) a průměr drátu (d). Průměr drátu změřte mikrometrem v několika místech a získané hodnoty zpracujte jako opakované měření průměru drátu.
- Určete výchozí polohu světelné stopy n_0 na stupnici při vyrovnávajícím závaží. Následně postupně přidávejte závaží tak, že jejich celková tíha je $G_i = m_i g$ a čtěte výchylky n_i'. Stejný postup zopakujte při odtěžování a čtěte výchylky n_i''.
- Při výpočtu konstanty K dosazujte aritmetický průměr odpovídajících hodnot n_i' a n_i''. Konstantu K z naměřených hodnot stanovte vyrovnáním lineární závislosti n_i na G_i metodou nejmenších čtverců.

Nejistoty měření:

- Nejistota typu A modulu pružnosti závisí na nejistotě typu A průřezu drátu a směrnice K. Nejistotu typu A průřezu drátu můžete zanedbat.

- Relativní nejistotu typu B výsledku stanovte pomocí vztahu pro případ nepřímo měřené veličiny ve tvaru součinu a podílu přímo měřených veličin, kde nejistoty přímo měřených veličin S, R, l_0, a, b vypočtěte z jejich maximálních chyb.

- Nejistotu průřezu drátu určíme na základě vztahu pro obsah kruhu $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$.

Dodatek 1. Měření malých úhlů, zrcátková metoda

K měření malých úhlů je možné použít zrcátkovou metodu. Sestrojíme-li vhodný převodní mechanizmus, který definovaným způsobem převádí malé výchylky na malé úhly, lze tuto metodu s úspěchem aplikovat i na měření malých výchylek. Princip metody je znázorněn na obr.5. Rovnoběžné světelné paprsky vycházejí ze zdroje S a dopadají na zrcátko Z, které je umístěno tak, aby odražený svazek dopadl na měřítko M. Základní poloze zrcátka odpovídá bod n_0 na měřítku. Pootočí-li se zrcátko o úhel φ, dopadající a odražený paprsek budou svírat úhel 2φ a odražený paprsek bude dopadat do bodu n. Mezi úhlem φ a vzdáleností $n - n_0$ platí vztah

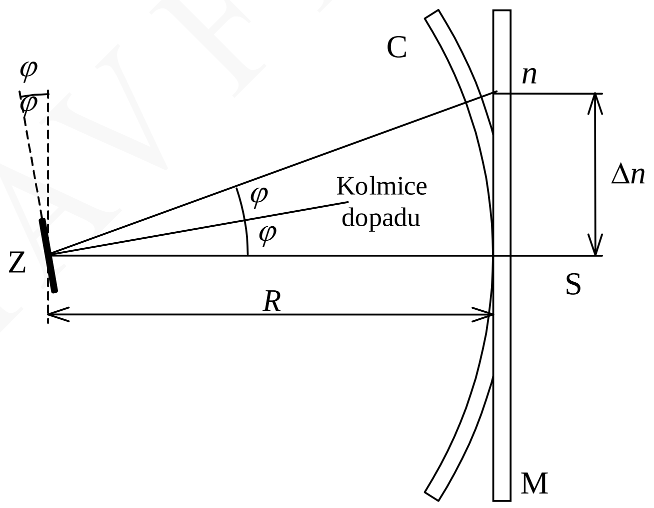
$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{n - n_0}{R} = \frac{\Delta n}{R}, \tag{10}$$

kde R je vzdálenost měřítka od zrcátka. Je-li úhel φ malý (přibližně do 5°) můžeme psát s dostatečnou přesností

$$\mathrm{tg}2\varphi \cong 2\varphi \quad \text{a tedy } \varphi \cong \frac{\Delta n}{2R}. \tag{11}$$

Pokud by úhly nebyly dostatečně malé, vypočítáme φ přesně podle vztahu

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\Delta n}{R}. \tag{12}$$



Obr. 5 Pootočení zrcátka

Obvykle vystačíme se vztahem (12) platným pro malé úhly. Existuje také možnost rovinné měřítko nahradit měřítkem nalepeným na kruhový oblouk C, jehož střed splývá s osou otáčení zrcátka. Úhel φ pak vypočteme ze vztahu (12) bez ohledu na jeho velikost. Podotkněme, že vzdálenost $n - n_0$ musíme měřit vždy v týchž délkových jednotkách jako vzdálenost R.

Literatura: Kohout Z., Budinská Z., Králová R., Pospíšil J., Bláhová I., Solar M.: *Laboratorní cvičení z fyziky*. 1vyd. Praha: ČVUT 2003.