Úloha 2

Stanovení tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Gravitační pole

Podle Newtonova gravitačního zákona všechna tělesa na sebe vzájemně působí přitažlivými silami, které se nazývají gravitační. Na těleso o hmotnosti m působí na Zemském povrchu gravitační síla

$$F_g = \kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2}, \tag{1}$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot kg^{-2} \cdot m^2}$ je gravitační konstanta, $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$ je hmotnost Země a $R_Z = 6\ 371\ \mathrm{km}$ je střední poloměr Země.

Na Zemi na těleso o hmotnosti m působí **tíhová síla** $\vec{G}$, která je výslednicí gravitační síly a odstředivé síly (v důsledku rotace Země kolem své osy). Při volném pádu ve vakuu uděluje tělesu **tíhové zrychlení** $\vec{g}$. Platí tedy

$$\vec{G} = m\,\vec{g}. \tag{2}$$

Tíhové zrychlení $\vec{g}$ je výslednicí vektorového součtu **gravitačního zrychlení** $\vec{a}_g$ a **odstředivého zrychlení** $\vec{a}_o$

$$\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_o. \tag{3}$$

Gravitační zrychlení $\vec{a}_g$ je důsledek gravitačního působení mezi Zemí a tělesem. Míří v daném místě do středu Země a jeho velikost závisí na vzdálenosti od středu Země. Odstředivé zrychlení $\vec{a}_o$ je vyvoláno rotací Země kolem své vlastní osy. Míří ve směru kolmém na tuto osu a jeho velikost závisí na zeměpisné šířce. Odstředivé zrychlení je o několik řádů menší než gravitační, např. v Praze je $a_o = 0,0026\,a_g$. Obecně je velikost tíhového zrychlení v různých místech povrchu Země různá, např. na pólu při hladině moře $g = 9,832\ \mathrm{m.s^{-2}}$, na rovníku při hladině moře $g = 9,780\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Proto se definuje normální tíhové zrychlení $g_n = 9,80665\ \mathrm{m.s^{-2}}$ (přesně), které zhruba odpovídá tíhovému zrychlení na 45° severní šířky při hladině moře.

Jednoduchá metoda měření tíhového zrychlení, při které by se měřil čas t, který potřebuje těleso k proběhnutí dráhy s při volném pádu ve vakuu v tíhovém poli Země a tíhové zrychlení vypočítalo ze vztahu $s = \frac{1}{2} g\, t^2$, není přesná. Přesnějších výsledků se dosáhne při měření tíhového zrychlení pomocí kyvadel.

Ze znalosti tíhového zrychlení lze určit i hmotnost Země a hustotu Země, pokud známe gravitační konstantu. Tu poprvé změřil Henry Cavendish na konci 18. století (tzv. Cavendishův experiment). Pro gravitační zrychlení na zemském povrchu platí vztah

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}. \tag{4}$$

Tíhové a gravitační zrychlení při naší přesnosti měření bude neodlišitelné $a_g \approx g$, a tak platí pro hmotnost Země

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{\kappa}. \tag{5}$$

Hustotu Země lze určit, pokud její tvar aproximujeme koulí. Objem Země je pak $V_Z = \frac{4}{3}\pi R_Z^3$ a hustotu určíme jako

$$\rho_Z = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{\frac{gR_Z^2}{\kappa}}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3} = \frac{3g}{4\pi\kappa R_Z}. \tag{6}$$

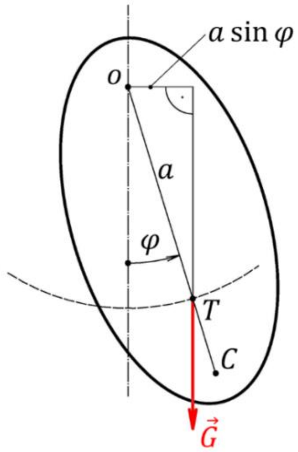
Více o gravitačním poli je ve skriptech z Fyziky I na straně 50.

Kyvadla

Fyzické (fyzikální) kyvadlo je každé těleso otočné kolem pevné, zpravidla vodorovné osy *o*, neprocházející jeho těžištěm, nacházející se v tíhovém poli. Kyvadlo je v rovnováze, je-li jeho těžiště v nejnižší poloze, tj. pod osou leží na přímce protínající osu *o*. V této poloze je moment tíhové síly $\vec{G}$ tělesa k ose *o* roven nule. Pro dobu kmitu *T* (perioda) kyvadla platí:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}, \tag{7}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa kolem osy *o*, m je hmotnost tělesa a a je vzdálenost osy otáčení od těžiště.



Obr. 1 Fyzické kyvadlo

Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m, upevněný na konci tuhého přímého vlákna konstantní délky l, jehož hmotnost je zanedbatelná, a který se otáčí kolem pevné vodorovné osy procházející druhým koncem vlákna. Moment setrvačnosti kyvadla, rovný součinu hmotnosti bodu a čtverce jeho vzdálenosti od vodorovné osy, kolem níž kyvadlo kývá, je rovný $J = ml^2$. Při malých výchylkách lze pohyb matematického kyvadla pokládat přibližně za harmonický pohyb, jehož doba kmitu je podle vztahu (7), do kterého dosadíme $a = l$, rovna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8}$$

Redukovaná délka fyzického kyvadla l_r je délka matematického kyvadla, jehož doba kmitu je rovna době kmitu daného fyzického kyvadla. Porovnáme-li pravé strany rovnic (7) a (8), dostaneme pro l_r výraz

$$l_r = \frac{J}{ma} > a. \tag{9}$$

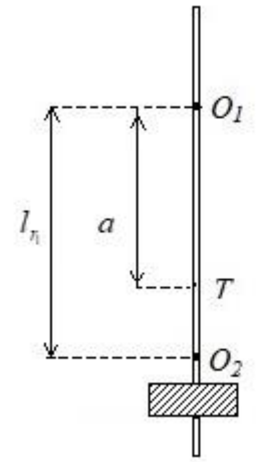
Reverzní kyvadlo je fyzické kyvadlo, které může konat kmitavý pohyb se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných pevných os. Tato podmínka je splněna, jestliže vzájemná vzdálenost těchto os je rovna redukované délce fyzického kyvadla l_r.

Mějme na reverzním kyvadle osu otáčení O_1 a ve vzdálenosti redukované délky kyvadla l_{r_1} od ní si zvolíme druhou osu otáčení O_2 (obr. 2). Těžiště je ve vzdálenosti a od osy O_1. Pro redukovanou délku pak platí s využitím Steinerovy věty

$$l_{r_1} = \frac{J_1}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma}, \tag{10}$$

kde J_1 je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose O_1, J_0 je moment setrvačnosti kyvadla vůči těžišti a a je vzdálenost těžiště vůči ose O_1. Úpravou pak získáme, čemu je roven moment setrvačnosti vůči těžišti

$$J_0 = ma(l_{r_1} - a). \tag{11}$$



Obr. 2 Reverzní kyvadlo

Poté kyvadlo převrátíme a zavěsíme ho v ose O_2. Nyní budeme mít obecně jinou redukovanou délku kyvadla l_{r_2} vlivem odlišného rozložení hmoty vůči této ose. To, co ovšem zůstává stejné jsou předchozí geometrické vzdálenosti. Pro redukovanou délku platí:

$$l_{r_2} = \frac{J_2}{m(l-a)} = \frac{J_0 + m(l-a)^2}{m(l-a)}, \tag{12}$$

kde J_2 je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose O_2, J_0 je moment setrvačnosti kyvadla vůči těžišti a $l-a$ je vzdálenost těžiště vůči ose O_2. Dosazením do vztahu (12) za moment setrvačnosti J_0 ze vztahu (11) dostaneme

$$l_{r_2} = \frac{J_0 + m(l_{r_1} - a)^2}{m(l_{r_1} - a)} = \frac{ma(l_{r_1} - a) + m(l_{r_1} - a)^2}{m(l_{r_1} - a)} = a + l_{r_1} - a = l_{r_1}. \tag{13}$$

Dospěli jsme tak k výsledku, že obě redukované délky jsou totožné a jsou rovné vzdálenosti mezi osami O_1 a O_2. A vlivem rovnosti obou redukovaných délek jsou i doby kmitu kolem obou os stejné dle vztahu (8).

Více o kyvadlech je ve skriptech z Fyziky I na straně 75.

Zadání:

1) Znázorněte graficky závislost doby kyvu na poloze závaží pro obě osy. Interpolační metodou určete polohu závaží pro reverzní kyvadlo.
2) Stanovte velikost tíhového zrychlení g a jeho nejistotu.
3) Z naměřené hodnoty g určete hmotnost Země a hustotu Země i s nejistotami.
4) Získané hodnoty porovnejte s tabulkovými hodnotami.

Teorie

Reverzní kyvadlo je tyč se dvěma rovnoběžnými osami (určenými hroty břitů) O_1, O_2 vzdálenými o délku l (obr. 2). Kolem těchto os může kyvadlo kývat s dobami kyvu τ_1, τ_2. Doba kyvu τ je polovinou doby kmitu T (čas návratu do původní polohy – perioda pohybu). V rovině určené osami leží těžiště na tyči kyvadla tak, že zmíněné osy jsou vůči těžišti kyvadla rozloženy asymetricky. Tyč je na jednom konci opatřena posouvatelným závažím Z, kterým je možno měnit polohu těžiště kyvadla vůči břitům. Pokud posouváním závaží dosáhneme toho, že kyvadlo kývá kolem obou os se stejnou dobou kyvu $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, je vzdálenost os l rovna redukované délce fyzického kyvadla. **Redukovaná délka fyzického kyvadla** je rovna délce l **matematického kyvadla**, které má stejnou dobu kyvu τ jako dané reverzní kyvadlo. Z řešení pohybové rovnice matematického kyvadla vyplývá vztah pro jeho dobu kyvu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{14}$$

Odtud plyne

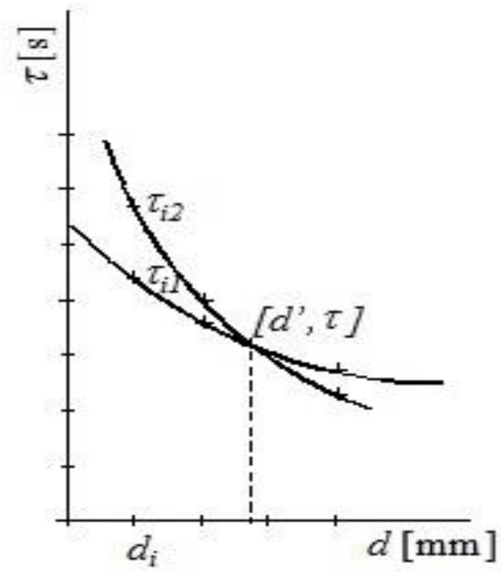
$$\boxed{g = \pi^2 \frac{l}{\tau^2}} \tag{15}$$

Vztahy (14) a (15) platí s dostatečnou přesností jen pro rozkyv kyvadla φ, který splňuje podmínku $\varphi \le 5°$, neboť jen tak lze pohyb kyvadla považovat za harmonický a při odvození aproximovat s dostatečnou přesností $\sin\varphi \approx \varphi$ (podmínka pro odvození kmitů kyvadla z pohybové rovnice). Při měření tedy kyvadlo rozkýváme jen pod úhlem do $5°$. Hmotnost Země a hustotu Země vypočteme ze vztahů (5) a (6).

Měření

- Polohu d' závaží Z, při které kyvadlo kývá kolem obou os O_1, O_2 se stejnou dobou kyvu τ, určíme metodou grafické interpolace (obr. 3). Postupně měníme vzdálenosti závaží d

od konce tyče a do grafu vynášíme doby kyvu kyvadla τ_{i1} kolem osy O_1 a doby kyvu τ_{i2} kolem osy O_2 v závislosti na vzdálenosti d_i.



Obr. 4 Graf polohy kyvadla a doby kyvu

- Souřadnice průsečíku křivek určuje přibližně vzdálenost závaží d', při které $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Takto získanou dobu kyvu τ použijeme při výpočtu tíhového zrychlení. Pro vytvoření grafu a získání průsečíku využijeme počítačový program, který je u této úlohy.

- Při měření budeme měnit polohu **závaží mezi 5 a 9 cm od konce tyče** zhruba po jednom centimetru. Budeme tak mít 5 měření pro každou osu. Zadejte do počítače hodnoty vzdálenosti závaží s přesností, se kterou měří posuvné měřítko!

- Po získání průsečíku pak do vzdálenosti d' nastavíme závaží a změříme doby kyvu τ_1, τ_2 pro kývání kolem os O_1, O_2. Délku l (vzdálenost břitů) změříme pásovým měřidlem.

Nejistoty měření

Standardní nejistoty měřených veličin stanovte podle obecných vztahů pro šíření nejistot nepřímo měřené veličiny – podle textu *Chyby a nejistoty měření*.

- Tíhové zrychlení je nepřímo měřená veličina, kterou vypočítáme z přímo měřených veličin l a τ. Proto relativní nejistotu u_{rg} veličiny g určíme pomocí vztahu pro součin mocnin přímo měřených veličin. Z charakteru měření vyplývá, že se jedná o nejistotu typu B.

- Nejistotu hmotnosti Země i hustoty Země také určíme jako relativní nejistotu ze vztahu pro součin mocnin přímo měřených veličin.

- Při odhadu chyby m_l přihlédneme ke skutečnosti, že vzdálenost břitů nelze změřit příliš přesně. Pásové měřidlo má nejmenší dílek 1 mm a určité chyby se dopustíme nepřesným přiložením měřidla. Položíme proto $m_l = 2\,\mathrm{mm}$.

- Chybu m_τ odhadneme z rozdílu dob kyvu τ_1, τ_2 při poloze závaží d' (průsečík), $m_\tau = |\tau_1 - \tau_2|$. Rozdělení pravděpodobnosti výskytu hodnot l a τ mezi krajními mezemi považujte za rovnoměrné ($\chi = \sqrt{3}$).