Úloha 1

Studium druhého Newtonova pohybového zákona

Druhý Newtonův pohybový zákon nám říká: „Zrychlení tělesa je přímo úměrné síle, která na těleso působí, a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.“ Matematicky tento zákon můžeme zapsat:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1}$$

Ve většině případů na těleso nepůsobí pouze jedna síla, ale sil několik. V tomto případě nejprve určíme výslednici těchto sil $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$.

Známe-li tedy výslednou sílu, která působí na těleso v daný okamžik, můžeme vypočítat jeho zrychlení v tomto okamžiku. Jelikož v naší úloze budeme řešit pohyb přímočarý, osu x soustavy souřadnic si zvolíme právě do směru studovaného pohybu. Tím můžeme dále řešit pouze jednorozměrný případ:

$$a_x = \frac{F_x}{m}. \tag{2}$$

Zrychlení je obecně definováno $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, x - ová složka zrychlení je tedy $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Po dosazení do rovnice (2) dostaneme pohybovou rovnici

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}. \tag{3}$$

Vyřešení této rovnice nám umožňuje určit závislost zrychlení, rychlosti a polohy na čase. Rovnice bude jednoznačně řešitelná, pouze pokud budeme znát počáteční podmínky. Budeme například znát polohu a rychlost tělesa v čase $t = 0$, což si označíme x_0 (počáteční poloha) a v_0 (počáteční rychlost). V případě konstantní výslednice sil působící na těleso bude mít závislost rychlosti na čase tvar:

$$v_x(t) = \frac{F_x}{m}t + v_0. \tag{4}$$

Závislost polohy tělesa na čase bude mít tvar:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2 + v_0 t + x_0. \tag{5}$$

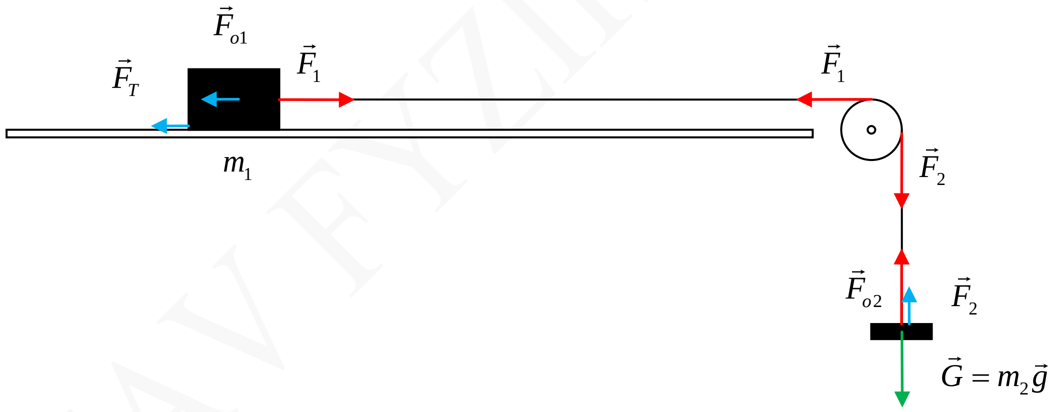
Zadání:

1) Proměřte zrychlení tělesa (vozíku) pro konstantní působící sílu $\vec{G} = m_2\vec{g}$ a pro různé hmotnosti vozíku m_1. Sestrojte graf závislosti zrychlení vozíku na hodnotě $\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)$. Určete směrnici této závislosti včetně nejistoty a porovnejte ji s její teoretickou hodnotou.

2) Proměřte zrychlení tělesa (vozíku) pro různé působící síly $\vec{G} = m_2\vec{g}$ a pro konstantní celkovou hmotnost sestavy $m_1 + m_2$. Sestrojte graf závislosti zrychlení vozíku na hodnotě $m_2 g$. Určete směrnici této závislosti a porovnejte ji s její teoretickou hodnotou včetně nejistot.

Teorie

Uspořádání experimentu na vzduchové dráze je na obr. 1. V obrázku jsou vyznačeny všechny síly působící na těleso (vozík) na vzduchové dráze ($\vec{F}_T$ třecí síla, $\vec{F}_{o1}$ odporová síla, $\vec{F}_1$ síla vlákna) a také na závaží způsobující vlastní pohyb ($\vec{G}$ tíhová síla, $\vec{F}_{o2}$ odporová síla, $\vec{F}_2$ síla vlákna).



Obr. 1 Schéma uspořádání úlohy

Pohybová rovnice pro vozík má tvar

$$m_1 a_1 = F_1 - F_T - F_{O1}. \tag{6}$$

Pohybová rovnice pro závaží má tvar

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_2 - F_{O2}. \tag{7}$$

Při pohybu dochází k otáčení kladky, obecně tedy musíme vzít v úvahu i její pohyb. Pohybová rovnice rotačního pohybu kolem pevné osy má tvar

$$J\varepsilon = rF_2 - rF_1 - M\ , \tag{8}$$

kde J je moment setrvačnosti kladky, ε úhlové zrychlení kladky, r poloměr kladky, M moment třecí síly kladky (zanedbáme).
Protože vidíme, že jsou obě tělesa vláknem pevně spojena, platí $a_1 = a_2 = a$, a protože vlákno na kladce neprokluzuje, platí $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$. Odporové síly a třecí sílu můžeme zanedbat. Výsledné rovnice mají pak tvar:

$$m_1 a = F_1$$

$$m_2 a = m_2 g - F_2$$

$$J\frac{a}{r} = rF_2 - rF_1$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)a = m_2 g \tag{9}$$

$$a = \frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2}\right)}. \tag{10}$$

Vzhledem k rozměrům a hmotnosti kladky, můžeme člen $\dfrac{J}{r^2}$ také zanedbat a dostaneme vztah pro závislost zrychlení na parametrech naší soustavy:

$$a = \frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)}. \tag{11}$$

Závislost rychlosti na čase bude mít tvar:

$$v(t) = \frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)} t. \tag{12}$$

Závislost polohy tělesa na čase bude mít tvar:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)} t^2. \tag{13}$$

Vzduchová dráha je vybavena měřícím zařízením, které snímá pohyb vlákna prostřednictvím optické závory, jejíž paprsek je přerušován otáčením kladky. Úhlové zrychlení a úhlová rychlost kladky jsou přímo úměrné zrychlení a rychlosti vozíku na vzduchové dráze. Natočení kladky je také přímo úměrné poloze vozíku na vzduchové dráze. Měřící program vykresluje přímo časový průběh zrychlení, rychlosti vozíku a také polohy vozíku na vzduchové dráze.

Obr. 2 Vzduchová dráha

Měření

Postup měření zrychlení tělesa pro konstantní působící sílu $\vec{G} = m_2\vec{g}$ a pro různé hmotnosti vozíku m_1.

1) Zvážíme vozík včetně magnetu startovacího zařízení a háčku pro připevnění vlákna.

2) Připevníme vlákno se závažím $8\ \mathrm{g}$, aby nebylo zrychlení příliš vysoké. Hmotnost háčku je $2\ \mathrm{g}$. Celková hmotnost je tedy $m_2 = 10\ \mathrm{g}$.

3) Spustíme měření, uvolníme vozík a po dojezdu vozíku ho vrátíme na začátek a znovu uvolníme vozík atd. V grafech změřených závislostí tak máme několik měření. Nakonec měření zastavíme.

4) V grafu závislosti rychlosti vozíku na čase vybereme ty části, která odpovídají vlastnímu pohybu vozíku. Proložíme je lineárními závislostmi a odečteme směrnice tečen, které udávají zrychlení vozíku. Měřící program nám umožní z nich určit průměrnou hodnotu.

5) Na vozík přidáme symetricky závaží a pokračujeme podle bodů 3,4. Měření provedeme alespoň pro 4 různé hmotnosti vozíku m_1. Přidáváme hmotnosti 20g-40g-60g-80g.

6) Sestrojíme graf vyjadřující závislost zrychlení vozíku na hodnotě $\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$, který by měl odpovídat rovnici vycházející ze vztahu (11):

$$\boxed{a = g\frac{m_2}{(m_1+m_2)}.} \tag{14}$$

7) Směrnici závislosti včetně nejistoty porovnáme s teoretickou hodnotou g.

Postup měření zrychlení tělesa pro různé působící síly $\vec{G} = m_2\vec{g}$ a pro konstantní celkovou hmotnost sestavy $m_1 + m_2$.

1) Zvážíme vozík (včetně magnetu startovacího zařízení a háčku pro připevnění vlákna), na který umístíme 5 jednogramových závaží – hmotnost m_1

2) Na začátku nasadíme na háček připojený k vláknu závaží o hmotnosti $4\ \mathrm{g}$. Hmotnost háčku je $2\ \mathrm{g}$. Celková hmotnost je tedy $m_2 = (4+2)\ \mathrm{g}$.

3) Spustíme měření, uvolníme vozík a po dojezdu vozíku ho vrátíme na začátek a znovu uvolníme vozík atd. V grafech změřených závislostí tak máme několik měření. Nakonec měření zastavíme.

4) V grafu závislosti rychlosti vozíku na čase vybereme ty části, která odpovídají vlastnímu pohybu vozíku. Proložíme je lineárními závislostmi a odečteme směrnice tečen, které udávají zrychlení vozíku. Měřící program nám umožní z nich určit průměrnou hodnotu.

5) Z vozíku sundáme jedno jednogramové závaží a umístíme je na háček k závaží, které způsobuje zrychlení. Měření opakujeme od bodu 3 až do odejmutí všech malých závaží z vozíku.

6) Sestrojíme graf vyjadřující závislost zrychlení vozíku na hodnotě $m_2 g$, který by měl odpovídat rovnici vycházející ze vztahu (11) a určíme směrnici této lineární závislosti.

$$\boxed{a = \frac{1}{(m_1 + m_2)} m_2 g\,.} \tag{15}$$

7) Směrnici závislosti včetně nejistoty porovnáme s hodnotou $\dfrac{1}{(m_1 + m_2)}$, u které také určíme nejistotu.

Nejistoty měření

Standardní nejistota typu A gravitačního zrychlení v úkolu 1) je rovna směrodatné odchylce směrnice závislosti:

$$u_g = u_{směrnice}\,. \tag{16}$$

Standardní nejistota typu A výrazu $\dfrac{1}{(m_1 + m_2)}$ v úkolu 2) je také rovna směrodatné odchylce směrnice závislosti:

$$u_{\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)} = u_{směrnice}\,. \tag{17}$$

Standardní nejistotu typu B teoretické hodnoty určíme na základě přesnosti vážení. Z chyby vah určíme nejistotu celkové hmotnosti $\left(m_1+m_2\right)$ tedy $u_{\left(m_1+m_2\right)}$. Nejistotu převrácené hodnoty určíme pomocí relativních nejistot:

$$u_{r\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)}=u_{r\left(m_1+m_2\right)}. \tag{18}$$

Standardní nejistota typu B výrazu $\dfrac{1}{\left(m_1+m_2\right)}$ je tedy:

$$\boxed{u_{\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)}=u_{r\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)}\cdot\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)} \tag{19}$$