

### 6 Mechanika tekutin

#### 6.1 Molekulová charakteristika látek

Látky se skládají z molekul a atomů. Velikost atomů je řádově  $10^{-10}$  m. Částicový model látek umožňuje vysvětlit rozdíly v chování látek v různých skupenstvích a některé s tím související vlastnosti.

Rozlišujeme čtyři skupenství látek: pevné, kapalné, plynné a plazma.

**Pevné látky** mají stále stejný objem a tvar. To vysvětlujeme tím, že molekuly podléhají mezimolekulovým silám, které jsou v podstatě elektrické povahy. Tyto síly klesají s rostoucí mezimolekulovou vzdáleností a jsou přitažlivé (kohezní). Naopak pro velmi malé vzdálenosti se charakter těchto sil mění na odpudivé (lze chápat jako neprostupnost molekul). Částice jsou vázány na pevné polohy, avšak nejsou v klidu, konají kmitavé pohyby kolem svých rovnovážných poloh a intenzita těchto pohybů závisí přímo na teplotě.

Pokud s rostoucí teplotou intenzita pohybů roste, jejich kinetická energie překonává potenciální energii přitažlivých sil a uspořádaná molekulová struktura pevné látky, charakterizovaná stálým tvarem, se rozpadá. Z pevné látky se stává kapalina.

**Kapaliny** jsou charakteristické tím, že molekuly nejsou vázány na pevné polohy v látce, volně se pohybují, nicméně jsou stále v blízkosti jiných molekul, dochází náhodně ke srážkám, a pohyb je tak chaotický. Kapalina má sice stále stejný objem, ale nemá již stejný tvar, ten je dán tvarem nádoby, ve které se kapalina nachází. Zároveň tam, kde nejsou stěny pevné nádoby, vzniká volná hladina jako rozhraní mezi kapalinou a plynem (např. vzduchem). Kapalina zaujímá v nádobě polohu s minimální potenciální energií výsledného vnějšího silového pole.

V pevných látkách i kapalinách jsou vzdálenosti molekul relativně malé. Při působení vnějších kompresních sil kladou pevné i kapalné látky značný odpor vůči deformaci, a proto se v prvním přiblížení často považují za nestlačitelné (ideální pevné těleso, ideální kapalina).

**Plyny** nemají stálý tvar ani objem. Molekuly se pohybují značnými rychlostmi volně v celém vymezeném prostoru nádoby. Dochází ale k vzájemným interakcím (srážky a slabé mezimolekulové síly). Pohyb molekul plynu je chaotický co do velikosti i směru. Vzdálenosti mezi molekulami jsou podstatně větší než v kapalině nebo pevné látce a tím je hustota plynné látky menší.

**Plazma** se generuje dalším zvýšením rychlosti pohybu molekul v plynu, přičemž dochází k četným srážkám. Nastává ionizace neutrálních molekul, takže pohybující se částice jsou kladné a záporné ionty. I když je tento stav látky ve vesmíru převažující, v tomto skriptu jej nebudeme hlouběji studovat.

---

## 6. MECHANIKA TEKUTIN

---

Kapaliny a plyny se v různých ohledech chovají podobně, a proto pro ně zavádíme společné pojmenování, **tekutiny**. Liší se stlačitelností  $\gamma$ , veličinou, která je definována jako relativní zmenšení objemu  $\frac{dV}{V}$  při změně tlaku  $dp$  vztahem

$$\gamma = -\frac{1}{dp} \frac{dV}{V} . \quad (6.1)$$

Zatímco plyny jsou značně stlačitelné, kapaliny vykazují stlačitelnost výrazně menší (řádově  $10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ )

Pokud kapalinu můžeme považovat za nestlačitelnou a zanedbat vnitřní tření, nazýváme ji **ideální kapalinou**. Obecně při změně tlaku dochází i ke změně hustoty, tj. hmotnost látky v jednotkovém objemu. U ideálních kapalin je díky její nestlačitelnosti hustota konstantní, ( $\rho = \text{konst.}$ ) bez ohledu na tlak.

### 6.2 Hydrostatika

#### 6.2.1 Hustota a tlak

##### **Hustota**

Hustota látky  $\rho$  je definována jako hmotnost obsažená v jednotce objemu,

$$\rho = \frac{m}{V} . \quad (6.2)$$

Jednotkou hustoty je  $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Tento vztah definuje průměrnou hodnotu hustoty v objemu  $V$  konečné velikosti. Protože ale hustota látky se může lokálně měnit, definujeme obecněji hustotu jako

$$\rho = \frac{dm}{dV} . \quad (6.3)$$

Takto definována hustota je funkcí prostorových souřadnic  $\rho(x, y, z)$ . Hustota závisí také na teplotě, protože objem látky je také funkcí teploty.

##### **Tlak**

Tlak v tekutině je projevem silového působení. Uvažujeme-li v tekutině libovolně orientovanou plochu  $S$ , na niž působí síla  $F$  kolmá k této ploše, pak tlak je definován jako tato kolmá síla vztažená na jednotku plochy

$$p = \frac{F}{S} \quad (6.4)$$

Jednotkou tlaku je pascal [ $p$ ] = N.m<sup>-2</sup> = Pa.

Protože, podobně jako u hustoty, silové působení na jednotku plochy se může měnit v závislosti na poloze, definujeme tlak obecněji jako

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (6.5)$$

Tlakovou sílu (například na pevnou stěnu) pak získáme na základě známého rozložení tlaku podle vztahu

$$F = \int p \, dS \quad (6.6)$$

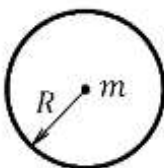
Zdůrazněme, že **tlaková síla je vždy kolmá** na uvažovanou plochu.

Důležitý poznatek o šíření tlaku, resp. změně tlaku v tekutině vyjadřuje **Pascalův zákon**.

**Tlak vyvolaný vnější silou, která působí na kapalinu v uzavřené nádobě, je ve všech místech kapaliny stejný.**

### 6.2.2 Molekulové jevy na povrchu kapalin

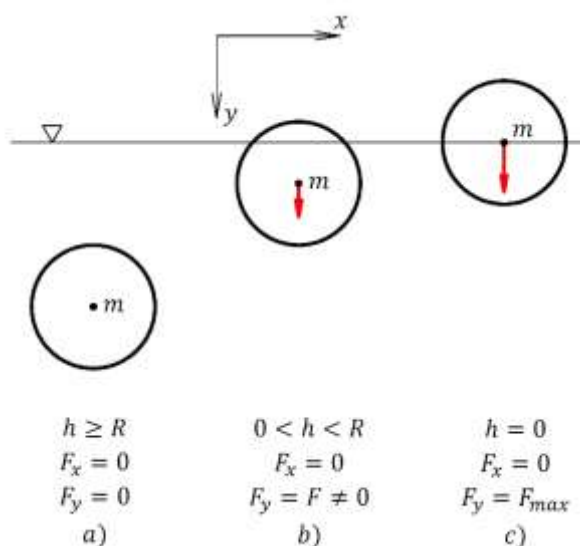
Ohraničení kapaliny tvoří buď volná hladina (zpravidla rozhraní se vzduchem, resp. obecně s plynem) nebo stěna (pevná látka).



Obr. 6.1

Každá molekula ve svém okolí vytváří oblast svého silového působení na ostatní molekuly, jejíž dosah je řádově 10<sup>-9</sup> až 10<sup>-8</sup> m (tzv. sféra molekulového působení, její poloměr  $R$ ) - Obr. 6.1.

- Uvnitř kapaliny je silové působení okolních molekul symetricky rozloženo, a tak je výsledný silový efekt nulový, obr.6.2a).
- V okrajové zóně tekutiny již ale symetrie silových účinků nemůže být. Molekuly této vrstvy podléhají výslednici přitažlivých kohezních sil okolních molekul, která je nenulová a směřuje do kapaliny, obr. 6.2b), c).



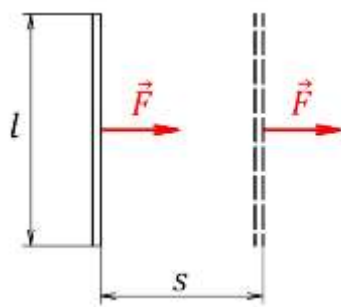
Obr. 6.2

Čím blíže je molekula hranici (hladině, stěně), tím větší je asymetrie sil a výsledný přitažlivý účinek vnitřních molekul kapaliny. Vztáhneme-li tento kohezní silový účinek vnitřních molekul na jednotku plochy rozhraní, mluvíme o **kohezním tlaku**, též **molekulovém tlaku**. Vliv silového působení molekul plynu nad volnou hladinou na molekuly kapaliny se zanedbává, protože hustota plynu je řádově nižší než hustota kapalin. Zřejmě je tedy tlak na volné hladině kapaliny menší než tlak uvnitř kapaliny o hodnotu kohezního tlaku. Kohezní tlak není možné experimentálně zjistit, protože každé čidlo tlaku představuje stěnu, rozhraní kapaliny. Lze jej jenom odhadovat (řádově je až  $10^9$  Pa).

V případě rozhraní kapaliny se stěnou pevné látky na molekuly v povrchové vrstvě kapaliny působí molekuly pevné látky tvořící stěnu přitažlivou silou. Tato síla se nazývá **adhezní síla**.

Vrstva tekutiny přiléhající k rozhraní má jiné chování než vnitřní oblast kapaliny. U volné hladiny směřují výsledné přitažlivé kohezní síly do kapaliny. Díky tomu mají molekuly v povrchové vrstvě jistou potenciální energii oproti molekulám uvnitř tekutiny. Ve snaze minimalizovat tuto potenciální energii zaujímá kapalina takový tvar, aby povrch byl minimální (v gravitačním poli tvar kapky, v nepřítomnosti vnějšího silového pole, například při volném pádu nebo v beztížném stavu, tvar koule).

Vlastnosti rozhraní kapaliny charakterizuje veličina **povrchové napětí**  $\sigma$ . K jejímu zavedení lze přistoupit dvojím způsobem.



Obr. 6.3

Uvažujme nejprve hladinu kapaliny a představme si myšlený přímý řez délky  $l$  na této hladině, obr. 6.3. Na tento řez působí molekuly kapaliny v rovině hladiny silou  $F$ , která je k řezu kolmá. Povrchové napětí je pak definováno jako tato síla vztažená na jednotkovou délku řezu

$$\sigma = \frac{F}{l}, \quad (6.7)$$

Jednotkou povrchového napětí je  $[\sigma] = \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Ke stejnému vztahu můžeme dospět také z energetické úvahy. Dochází-li ke změně velikosti povrchu kapaliny, mění se potenciální energie povrchové vrstvy, protože se mění počet molekul v povrchové vrstvě. S tím souvisí práce konaná kohezními silami. Při myšleném zvětšení povrchu posunutím o délku  $s$ , způsobeném výše uvažovanou povrchovou silou na délce řezu  $l$ , je práce kohezní síly rovna

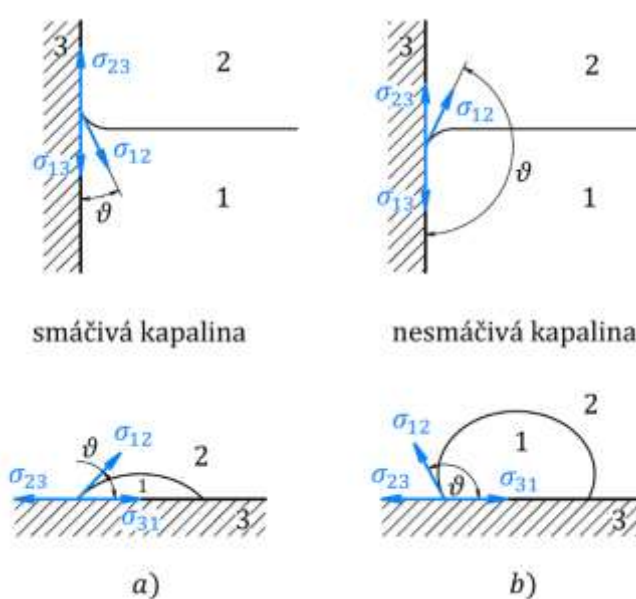
$$W = Fs = \sigma ls = \sigma \Delta S. \quad (6.8)$$

Tato práce je rovna zvýšení potenciální energie povrchové vrstvy  $E_p$ . Tomu odpovídá změna velikosti povrchu  $\Delta S = ls$ . Je tak patrné, že povrchové napětí je rovno potenciální energii povrchové vrstvy vztažené na jednotku plochy povrchu, čili plošné hustotě potenciální energie povrchové vrstvy  $\sigma = \frac{E_p}{S}$ .

6.2.3 Jevy na rozhraní tří prostředí

Tak, jako byl v předcházejícím článku zaveden pojem povrchového napětí v povrchové vrstvě kapaliny na volné hladině oddělující kapalinu od vzduchu (plynu), lze uvažovat podobně o rozhraní mezi kapalinou a stěnou, případně o rozhraní mezi vzduchem a stěnou. V těchto případech se vedle kohezních sil uplatňují také adhezní síly, především ze strany stěny.

Označme prostředí kapaliny 1, vzduchu 2 a prostředí stěny 3 (obr. 6.4). Označme povrchové napětí mezi kapalinou a vzduchem  $\sigma_{12}$ , mezi kapalinou a stěnou  $\sigma_{13}$  a mezi vzduchem a stěnou  $\sigma_{23}$ .



Obr. 6.4

V místech, kde je hladina kapaliny (rozhraní kapalina – vzduch) v kontaktu s rovnou stěnou (rozhraní kapalina – stěna a rozhraní vzduch – stěna) není povrch kapaliny rovný ale je zakřiven díky interakci povrchových sil tří prostředí. Pokud je rozhraní tří prostředí v klidu, nastává statická rovnováha sil povrchového napětí a pro povrchová napětí těmito silám odpovídající platí

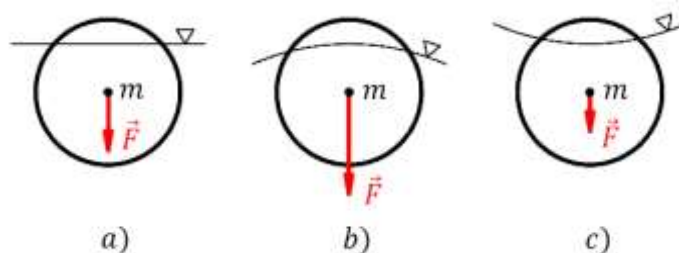
$$\sigma_{23} = \sigma_{13} + \sigma_{12} \cos \theta, \quad \text{resp.} \quad \cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}, \quad (6.9)$$

kde  $\theta$  je tzv. **mezní úhel**, též úhel smáčení, Je to úhel mezi tečnou k hladině kapaliny u stěny a stěnou na straně kapaliny. Pokud je úhel  $\theta$  ostrý, adhezní síla převládá a kapalina materiál stěny smáčí (např. voda – sklo, rtuť – zinek), pokud je úhel  $\theta$  tupý, kapalina stěnu nesmáčí (např. voda – parafin, rtuť – sklo). U smáčivých kapalin tak dochází k vzestupu hladiny u vertikální stěny, u nesmáčivých naopak ke snížení hladiny. Podobně lze smáčivost sledovat na vodorovné stěně, na níž jsou kapky kapaliny. O smáčivosti rozhoduje tzv. **adhezní konstanta**, tj. rozdíl  $\sigma_{23} - \sigma_{13}$ . Pokud je kladná, vychází dle vztahu (6.9) mezní úhel ostrý, pokud je záporná, mezní úhel je tupý.

Smáčivost povrchů hraje důležitou roli v mnoha procesech a technologiích, například barvení, pájení, čištění ale i v medicíně, textilním průmyslu, materiálovém inženýrství a mnoha jiných oborech. Smáčivost lze měřit různými metodami. Mezi přímé metody patří metoda nakloněné desky, metoda se využívá pro měření malých mezních úhlů (do  $10^\circ$ ). Úhel smáčení může být vyhodnocen ještě na základě tvaru kapek umístěných na čisté desce zkoumaného materiálu nebo tvaru bublin, které přilnuly k desce ponořené do kapaliny. V současnosti tuto metodu používáme tak, že snímáním obrazu kapky do počítače a jeho následnou digitalizací dokážeme vyhodnotit úhel smáčení. Mezi nepřímé metody patří metoda vyvažovací destičky, která je založena na měření změny hmotnosti destičky (velmi tenké) způsobené kapalinou vzlínající po povrchu destičky. Další nepřímou metodou je měření úhlu smáčivosti z průměru podstavy a výšky sférické kapky.

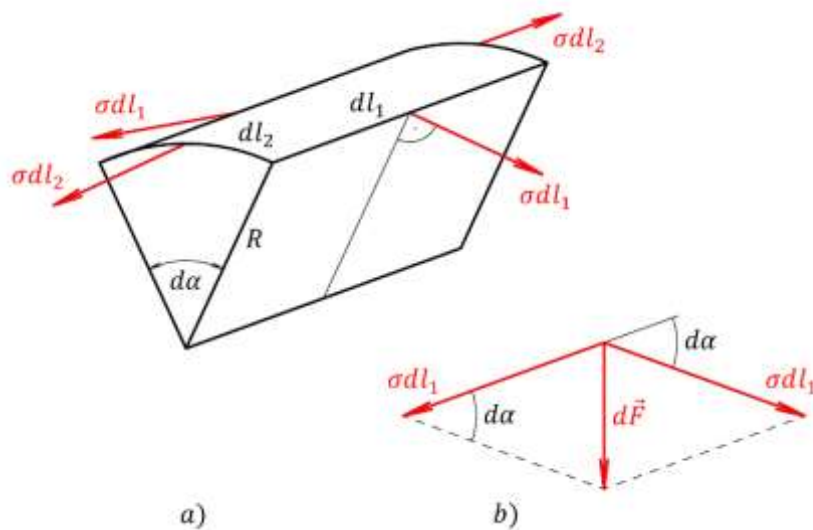
### 6.2.4 Kapilární tlak

Je-li povrch kapaliny zakřivený, působí povrchová vrstva na kapalinu jinou silou než u povrchu rovinného. Tento přídavný tlak se nazývá **kapilární tlak** a přičítá se ke koheznímu tlaku v případě vypuklého povrchu, odečítá se u dutého povrchu.



Obr. 6.5

Vznik kapilárního tlaku lze vysvětlit představou o asymetrii kohezních sil působících z vnitřku kapaliny na molekuly v povrchové vrstvě kapaliny. V případě konvexního povrchu (obr. 6.5b)) je asymetrie silového působení větší než u rovinného povrchu, protože v horní části sféry molekulového působení je méně molekul než v případě rovinného povrchu (obr. 6.5a)). V případě konkávního povrchu (obr. 6.5c)) je naopak asymetrie menší z opačného důvodu.



Obr. 6.6

Vztah pro kapilární tlak získáme analýzou silového působení povrchového napětí na element zakřiveného povrchu kapaliny.

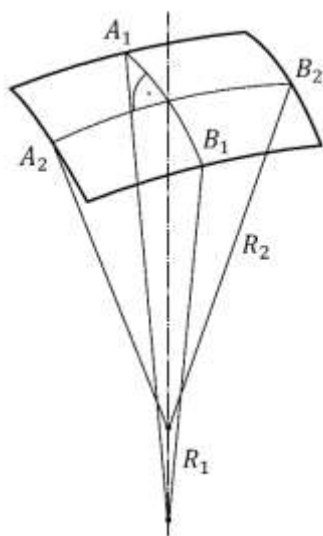
Uvažujme nejprve element válcového povrchu (jednorozměrné zakřivení), jemuž přísluší elementární válcová výseč o poloměru  $R$ , délce  $dl_1$  a oblouku  $dl_2$ . Úhel výseče je označen  $d\alpha$ , takže pro délku oblouku platí  $dl_2 = R d\alpha$ , obr. 6.6 .

Síly povrchového napětí podél oblouků  $dl_2$ , které směřují ve směru osy výseče jsou stejně velké, opačně orientované, a jejich výslednice je tedy nulová. Síly povrchového napětí v rovině kolmé na osu válce (výseče) jsou také stejně velké, svírají spolu úhel  $d\alpha$ , jejich výslednice je tedy

$dF = \sigma dl_1 d\alpha$  (obr. 6.6 a)). Vzhledem k tomu, že  $d\alpha = \frac{dl_2}{R}$ , a  $dl_1 dl_2 = dS$  je element plochy povrchu výseče, platí

$$dF = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R} = \frac{\sigma dS}{R} \quad (6.10)$$

Podíl  $p_k = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma}{R}$  je vztah pro kapilární tlak v případě jednorozměrného zakřivení.



Obr. 6.7

Je-li povrch zakřivený obecně, obr. 6.7, můžeme v každém jeho bodě vést dva k sobě kolmé řezy obsahující společnou normálu, poloměry těchto řezů označme  $R_1$ ,  $R_2$ . Aplikací úvahy pro jednorozměrné zakřivení dostaneme dva příspěvky kapilárního tlaku  $p_{k1}$ ,  $p_{k2}$ , a jejich součet je celkový kapilární tlak. Tento vztah se nazývá Laplaceův a platí

$$p_k = p_{k1} + p_{k2} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (6.11)$$

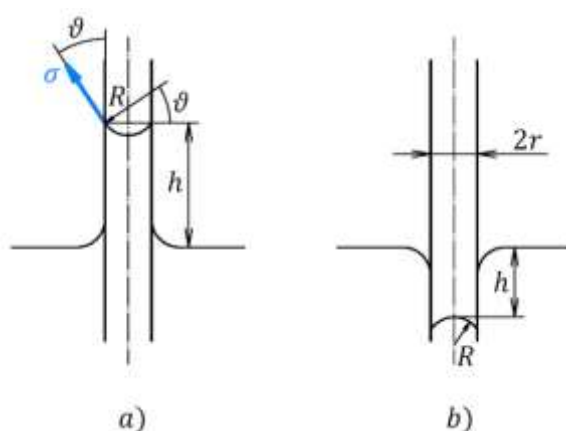
Má-li pak povrch kapaliny tvar kulového vrchlíku,  $R_1 = R_2 = R$ , pak

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} . \quad (6.12)$$

### 6.2.5 Kapilární jevy

Vzhledem k adhezním silám se u stěny zakřivuje volná hladina mezi kapalinou a vzduchem (plynem), uplatňuje se kapilární tlak. Tento jev je výrazný u trubic malého vnitřního průměru, kapilár. Dochází tak k vzestupu kapaliny nad úroveň volné hladiny, **kapilární elevaci**, a to v případě smáčení stěny kapalinou. Nebo naopak nastává pokles hladiny pod úroveň okolní volné hladiny u nesmáčivých kapalin – **kapilární deprese**.

Velikost kapilární elevace nebo kapilární deprese závisí na povrchovém napětí na volné hladině a na vnitřním průměru kapilární trubice.



Obr. 6.8

Mějme podle obr. 6.8a) kapilární trubici o vnitřním poloměru  $r$ , která je ponořena svisle do smáčivé kapaliny (např. skleněná kapilára ve vodě o hustotě  $\rho$ ). Po ponoření trubice voda v kapiláře vystoupí do výšky  $h$ , úhel mezi hladinou a stěnou (mezní úhel) je  $\vartheta$ .

Podél křivky délky  $2\pi r$ , která se rovná obvodu kapiláry, působí na sloupec kapaliny o hmotnosti  $m$  svislá složka síly povrchového napětí  $\sigma$ , která je v rovnovážném stavu rovna tíze tohoto sloupce kapaliny, takže podle (6.7) a (6.2) platí:

$$2\pi r\sigma \cos \vartheta = mg = \pi r^2 h \rho g \quad . \quad (6.13)$$

Podobná úvaha platí pro kapilární depresi na obr. 6.8b). Odtud lze vyjádřit povrchové napětí  $\sigma$

$$\sigma = \frac{r\rho gh}{2\cos\theta} \quad , \quad (6.14)$$

nebo naopak kapilární elevaci

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r\rho g} \quad . \quad (6.15)$$

V těchto dvou vztazích platí kladné hodnoty  $h$  a  $\cos\theta$  pro smáčivou stěnu (kapilární elevaci) a záporné hodnoty pro nescháčivou stěnu (kapilární depresi).

Vztah (6.13) lze za předpokladu, že je vrchlík kapaliny v kapiláře kulový, interpretovat také jako rovnováhu tíhy sloupce kapaliny  $\rho gh\pi r^2$  a síly kapilárního tlaku  $\frac{2\sigma}{R}\pi r^2$ , kde poloměr vrchlíku je

$$R = \frac{r}{\cos\theta} \quad , \text{ tedy}$$

$$\frac{2\sigma}{R} \pi r^2 = \rho g h \pi r^2, \quad (6.16)$$

z čehož opět plynou vztahy (6.14) a (6.15).

Díky kapilaritě se například přivádí rostlinám voda z půdy, kapilarita způsobuje nasávání roztaveného vosku do knotů, vzlínání kapalin do stěn domů při špatné izolaci proti vlhkosti, uplatňuje se i při pájení.

### 6.2.6 Hydrostatický tlak

Na tekutinu působí v gravitačním poli síla, jejíž projevem je hydrostatický tlak (kapaliny) nebo aerostatický tlak (plyny).

Uvažujme nejprve případ kapaliny, u níž předpokládáme, že je nestlačitelná, tedy její hustota je všude konstantní,  $\rho = konst.$

Mějme nádobu naplněnou kapalinou (obr. 6.9 a)). do výšky  $h$ . Na hladině působí atmosférický tlak  $p_a$ . Zaveďme kladný směr osy  $y$  směrem nahoru k hladině, a její počátek je na dně nádoby. Zvolme v kapalině válcový element o výšce  $dy$  a ploše podstavy  $S$ . Jeho spodní podstava je ve vzdálenosti  $y$  ode dna.

- Tlaková síla, působící na spodní podstavu je rovna  $F = pS$  a míří v kladném směru osy  $y$ . Tlaková síla působící na horní základnu ve vzdálenosti  $y + dy$  se liší (z důvodu diferenciální změny tlaku) a je rovna  $F' = (p + dp) S$ . Míří tedy dolů, proti kladnému směru osy  $y$ .
- Zároveň ještě proti kladnému směru osy  $y$  na element kapaliny  $dm$  působí tíha kapaliny  $G = dm g = \rho dV g = \rho S dy g$ . V rovnováze musí být výslednice sil ve směru osy  $y$  rovna nule a tedy:

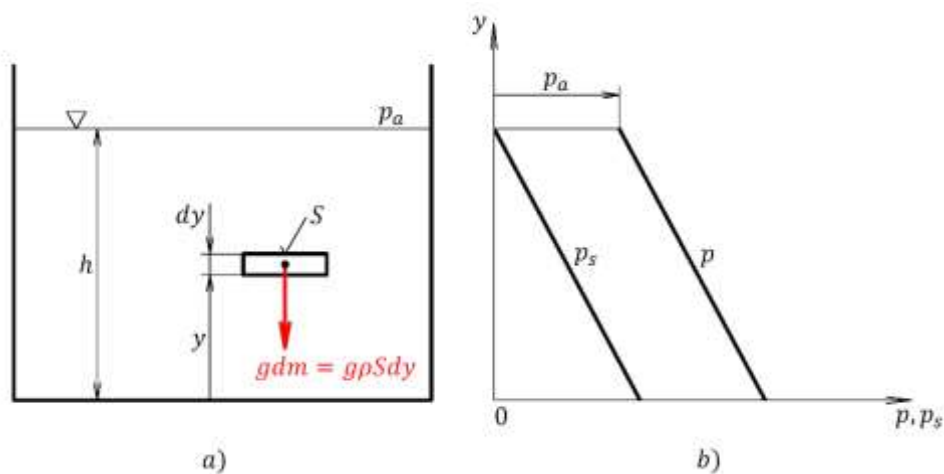
$$pS - (p + dp)S - \rho g S dy = 0 \quad (6.17)$$

a po úpravě 
$$dp = -\rho g dy \quad (6.18)$$

Integrací vztahu (6.18) a za předpokladu, že na hladině ( $y = h$ ) je atmosférický tlak ( $p = p_a$ ) dostáváme závislost tlaku v kapalině na vertikální poloze

$$\begin{aligned} \int dp &= \int -\rho g dy \\ p &= -\rho g y + C \quad \Rightarrow C = p_a + \rho g h \\ p &= -\rho g y + p_a + \rho g h = p_a + \rho g (h - y) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Jedná se o celkový, resp. **absolutní tlak** v kapalině.



obr. 6.9

Rozdíl celkového tlaku a atmosférického tlaku  $p_s = p - p_a = \rho g (h - y)$  je dán jen tíhou vlastní kapaliny a nazývá se **hydrostatický tlak**. Je patrné, že hydrostatický tlak závisí na hustotě kapaliny a na kolmé vzdálenosti od volné hladiny.

Rovnice (6.19) je zvláštním případem obecnější rovnice hydrostatiky, Eulerovy rovnice,

$$dp = -\rho \vec{K} \cdot d\vec{r}, \quad (6.20)$$

v níž vektor  $\vec{K}$  je intenzita obecného silového působení (síla na jednotku hmotnosti),  $[K] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $d\vec{r}$  je vektor posunutí.

V případě stlačitelné tekutiny (plynu) je třeba uvažovat, že hustota nemusí být konstantní, ale může záviset například na poloze nebo na tlaku plynu. Odvodme si závislost atmosférického tlaku na výšce nad zemským povrchem. Zvolíme počátek osy  $y$  na zemském povrchu, kde hodnotu atmosférického tlaku označíme  $p_{a0}$ . Uvažujeme-li izotermickou změnu (kapitola 8), při níž je

teplota konstantní, popsanou vztahem  $\frac{p}{\rho} = \frac{p_{a0}}{\rho_0} = \text{konst.}$ , pak  $\rho = \frac{\rho_0}{p_{a0}} p$ . Po dosazení do (6.20),

dostaneme diferenciální rovnici, jejíž řešením je :

$$\ln\left(\frac{p}{p_{a0}}\right) = -\frac{\rho_0}{p_{a0}} gy \Rightarrow p = p_{a0} e^{\left(-\frac{\rho_0}{p_{a0}} gy\right)}. \quad (6.21)$$

Pro malé hodnoty argumentu exponenciální funkce lze rovnici ještě upravit na tvar

$$p = p_{a0} \left(1 - \frac{\rho_0}{p_{a0}} gy\right). \quad (6.22)$$

Tento vztah se uplatňuje např. u výškoměrů, kdy změna nadmořské výšky  $\Delta y$  odpovídá změně atmosferického tlaku  $\Delta p$

$$\Delta y = \frac{\Delta p}{\rho_0 g} \quad (6.23)$$

### 6.2.7 Archimedův zákon

Na těleso v kapalině působí hydrostatický tlak po celém jeho povrchu. Složky tlakové síly jsou ve vodorovném směru vzájemně vykompenzovány. Ve svislém směru je situace jiná. Na spodní část ponořeného tělesa působí větší svislé složky tlakové síly než na vrchní část, takže výslednice tlakových sil míří vzhůru, projevuje se jako **vztlak**.

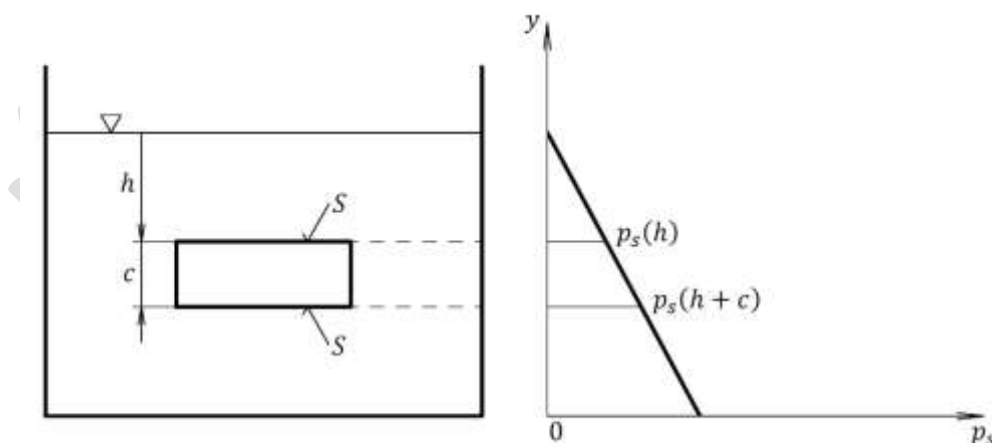
Jako konkrétnější ilustraci uvažujme těleso tvaru kvádru, plochy horní a dolní základny  $S$  jsou stejně velké a výška kvádru je  $c$  (obr. 6.10).

Výsledná vztlková síla je rozdílem tlakové síly na spodní základnu  $S\rho g(h+c)$  a tlakové síly na horní základnu  $S\rho gh$

$$F_{vz} = S\rho g(h+c) - S\rho gh = \rho gV, \quad (6.24)$$

což je vztah pro tíhu kapaliny vytlačené tělesem.

Těleso je tak v kapalině nadlehčováno silou, jež je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené. Tento vztah se nazývá **Archimedův zákon** a je platný obecně pro libovolný tvar ponořeného tělesa .



Obr. 6.10

### 6.3 Hydrodynamika

#### 6.3.1 Proudění kapalin

Pohyb tekutiny v prostoru studují obory zvané hydromechanika a dynamika plynů. Složitější aerodynamika a dynamika plynů jsou zároveň součástí termodynamiky.

Hydrodynamika hledá vztah mezi příčinami změny pohybu kapaliny a veličinami, které tento pohyb popisují. Tento vztah vyjadřuje **pohybová rovnice kapaliny**. Při popisu pohybu tekutiny lze použít dvou přístupů, Lagrangeova nebo Eulerova.

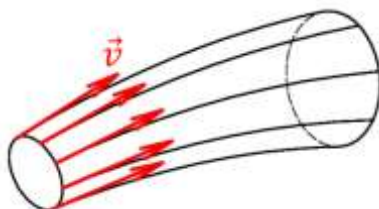
Při Lagrangeově metodě si zvolíme v tekutině určitou částici v počátečním čase  $t_0$  a sledujeme její pohyb udáním trajektorie částice (závislost polohového vektoru na čase). Tato metoda je ve většině praktických problémů složitá a obtížná.

Při **Eulerově metodě** vyšetřujeme stav proudění tekutiny v určitém bodě prostoru. Částice tekutiny která je v daném čase  $t$  v místě o souřadnicích  $x, y, z$  má určitou rychlost, složky vektoru rychlosti  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), která závisí na čase  $t$  a na poloze uvažovaného bodu a tedy

$$v_i(x, y, z, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.25)$$

Proměnné  $x, y, z, t$  se nazývají **Eulerovy proměnné**. Při použití Eulerovy metody se udává časový průběh rychlosti  $\vec{v}$  ve všech místech tekutiny určených polohovým vektorem  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$ . Orientované křivky, proložené v okamžiku  $t$  vektorovým polem rychlosti tak, že v každém bodě křivky má vektor rychlosti  $\vec{v}$  směr tečny ke křivce, se nazývají **proudnice**.

Každým místem prostoru obsahujícím **ideální kapalinu** prochází jen jedna proudnice. Proudění kapaliny, při němž vektor rychlosti  $\vec{v}$  proudící kapaliny ve všech místech v kapalině nezávisí na čase, se nazývá **ustálené proudění** nebo **stacionární proudění**. V různých místech rychlost tekutiny není obecně stejná. Proudění, při němž rychlost  $\vec{v}$  proudící kapaliny závisí na čase, se nazývá **neustálené proudění, nestacionární proudění**.



Obr. 6.11

Při ustáleném proudění se proudnice s časem nemění a splývají s trajektoriemi částic kapaliny, používanými k popisu proudění Lagrangeovou metodou. Myšlená trubice, jejíž plášť je tvořen

proudnicemi se nazývá **proudová trubice**, obr. 6.11. Tekutina uvnitř proudové trubice tvoří **proudové vlákno**. Pláštěm proudové trubice tekutina neprotéká.

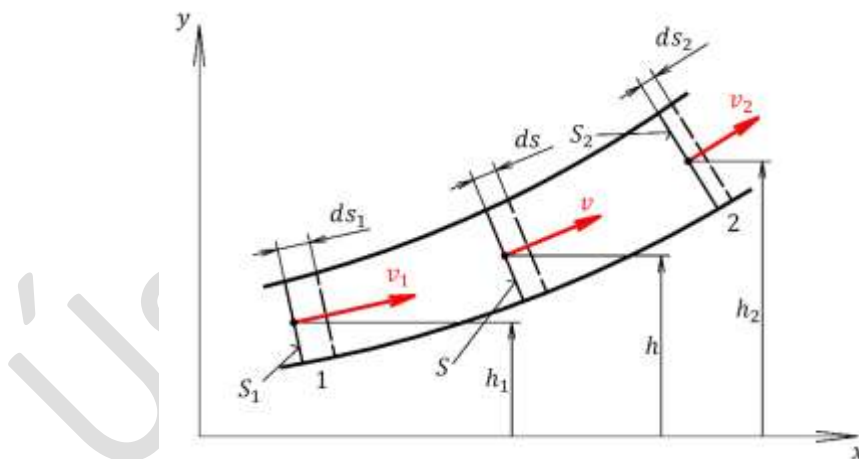
Definujeme:

- **laminární proudění** - proudění tekutiny, při němž jednotlivé vrstvy tekutiny proudí vedle sebe, aniž se promíchávají a přitom neztrácejí kontakt. Rychlost se podél vrstev i mezi vrstvami mění pozvolna. Laminární proudění může být jak stacionární, tak i nestacionární.
- **turbulentní proudění** - dochází k promíchávání vrstev, ke ztrátě jejich kontaktu, k velkým změnám, chaotickým fluktuacím rychlosti, hustoty a tlaku tekutiny v průběhu času. Je vždy nestacionární, jde o velmi složitý proces.

Reálné kapaliny jsou stlačitelné a jejich pohyb je doprovázen disipativními jevy, při kterých dochází k přeměně mechanické energie na teplo. Jedná se především o tzv. vnitřní tření, charakterizované vazkostí (viskozitou). Nestlačitelnou nevazkou tekutinu nazýváme **ideální kapalina**.

### 6.3.2 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je vztah, který kvantitativně vyjadřuje zákon zachování hmotnosti. Uvažujeme podle obr. 6.12 tekutinu v proudové trubici proměnného průřezu vymezenou dvěma průřezy 1 a 2.



Obr. 6.12

Dráha, kterou urazí pohybující se tekutina za elementární čas  $dt$  je dána součinem rychlosti  $v$  a času  $dt$ . Hmotnost elementu tekutiny  $dm$  procházející obecným průřezem proudové trubice za dobu  $dt$  vyjádříme pomocí plochy uvažovaného průřezu  $S$ , hustoty tekutiny  $\rho$  a její rychlosti  $v$  vztahem  $dm = \rho S ds = \rho S v dt$ .

---

## 6. MECHANIKA TEKUTIN

---

Pokud se omezíme pouze na stacionární proudění, tak tekutina o hmotnosti  $dm$ , jež vstoupí do kontrolní oblasti za dobu  $dt$  jedním průřezem, je rovna hmotnosti tekutiny, která vystoupí během stejné doby z kontrolní oblasti průřezem 2.

$$dm = \rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt . \quad (6.26)$$

Hmotnost tekutiny procházející průřezem proudové trubice za jednotku času nazýváme **hmotnostní tok**, označujeme jej  $Q_m$  a definujeme ho jako

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 . \quad (6.27)$$

Platí tedy

$$Q_m = \rho S v = konst. \quad (6.28)$$

Kapaliny jsou podstatně méně stlačitelné než plyny, ideální kapalina se dokonce považuje za nestlačitelnou a její hustota  $\rho$  za konstantní. Pak  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  a **rovnice kontinuity** má jednodušší tvar

$$Q_v = \frac{dV}{dt} = S_1 v_1 = S_2 v_2 = S v . \quad (6.29)$$

Veličina  $Q_v = \frac{dV}{dt}$  se nazývá **objemový tok**. Objemový tok je stejně jako hmotnostní tok při stacionárním proudění konstantní.

### 6.3.3 Bernoulliova rovnice

Uvažujme opět proudovou trubici proměnného průřezu a kontrolní oblast mezi průřezy 1, 2 podle obr. 6.12.

Tekutina podle rovnice kontinuity ve zúžující nebo rozšiřující se části podléhá změně rychlosti, tedy kladnému nebo zápornému zrychlení. Podle 2. Newtonova zákona je zrychlení důsledek silového působení na tekutinu. Na tekutinu tudíž působí vedle gravitační síly také síly tlakové.

Vzhledem k platnosti rovnice kontinuity mají vstupující a vystupující element tekutiny konstantní hmotnost  $dm$ . Element tekutiny o hmotnosti  $dm$  v průřezu 1 se během času  $dt$  posune o vzdálenost  $ds_1 = v_1 dt$  směrem do uvažované oblasti. Zároveň průřezem 2 vystoupí element tekutiny o stejné hmotnosti  $dm$  ven do vzdálenosti  $ds_2 = v_2 dt$ .

Při řešení vyjdeme z energetické bilance proudící tekutiny, tedy předpokládáme, že **změna kinetické energie sledovaného množství tekutiny je rovna práci sil, které tuto změnu vyvolaly**. Na tekutinu působí tíhová síla a tlaková síla (její velikost označíme  $F_{tlak}$ )

---

## 6. MECHANIKA TEKUTIN

---

Použijeme-li vztah, že práce působících sil na element tekutiny  $dm$  se projeví změnou jeho kinetické energie,  $W_g + W_{tlak} = \Delta E_k$ . Protože ale práce tíhové síly je rovna úbytku potenciální gravitační energie  $W_g = -\Delta E_p$  (kapitola 3), můžeme toto také interpretovat tak, že práce tlakových sil je rovna změně kinetické energie a změně potenciální energie elementu tekutiny.

$$W_{tlak} = \Delta E_k + \Delta E_p \quad . \quad (6.30)$$

Vyjádříme tyto tři členy:

Práce tlakových sil  $W_{tlak}$  v průřezech 1 a 2 je rovna

$$W_{tlak} = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 \quad . \quad (6.31)$$

Změna kinetické energie vystupujícího a vstupujícího elementu tekutiny je rovna

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho_2 dV_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 dV_1 v_1^2 \quad (6.32)$$

a změna potenciální energie vystupujícího a vstupujícího element tekutiny je rovna

$$\Delta E_p = dm gh_2 - dm gh_1 = \rho_2 dV_2 gh_2 - \rho_1 dV_1 gh_1 \quad . \quad (6.33)$$

Dosazením (6.31-6.33) do vztahu pro  $W_{tlak}$  (6.30)

$$p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = \frac{1}{2} \rho_2 dV_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 dV_1 v_1^2 + \rho_2 dV_2 gh_2 - \rho_1 dV_1 gh_1 \quad . \quad (6.34)$$

Tuto rovnici, s uvážením, že  $dm = \rho dV = \rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$  a po vydělení rovnice elementem  $dm$  upravíme tak, že veličiny odpovídající vstupnímu průřezu 1 jsou na jedné straně rovnice a veličiny odpovídající výstupnímu průřezu 2 jsou na druhé straně,

$$p_1 + \rho_1 gh_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 gh_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 \quad . \quad (6.35)$$

Všechny členy v tomto vztahu mají fyzikální rozměr energie jednotkového objemu, tedy objemové hustoty energie,  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ , což je zároveň fyzikální rozměr pro tlak (Pa). Zřejmě tak součet tří příspěvků objemových hustot energií, tlakové energie, gravitační potenciální energie a kinetické energie, je konstantní ve všech průřezích. Je tím vyjádřen zákon zachování mechanické energie pro stacionárně proudící tekutinu (plyn i kapalinu). V libovolném průřezu zřejmě platí

$$\boxed{p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = konst.} \quad (6.36)$$

Tento vztah se nazývá **Bernoulliho rovnice**.

V případě, že kapalina ( $\rho = konst.$ ) není v pohybu, její rychlost je všude nulová, pak dostaneme dříve uváděné relace hydrostatického tlaku.

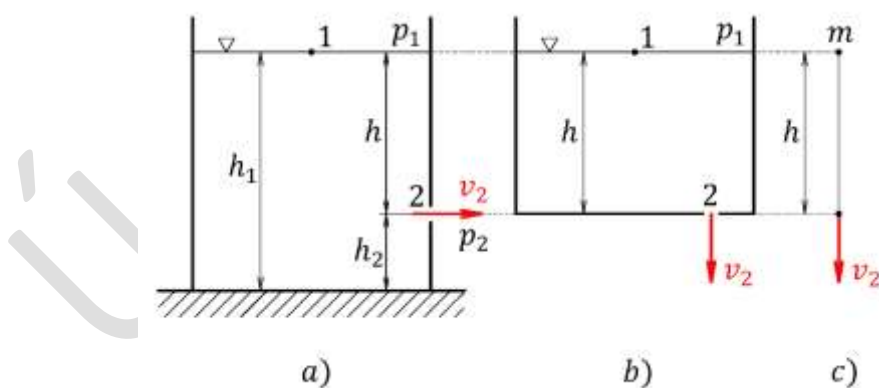
Poznámka: Nutno zdůraznit, že Bernoulliho rovnici lze takto aplikovat pro dvě místa ležící na stejné proudnici.

### 6.3.4 Výtok kapaliny z nádoby

Jako jednoduchou aplikaci Bernoulliho rovnice uveďme problém výtoku nestlačitelné neviské kapaliny z nádoby dle obr. 6.13. Otvor je ve stěně (obr. 6.13a) nebo v dně (obr. 6.13b)). Nádoba je uzavřená a tlak nad hladinou je  $p_1$ . Proudnice zde zřejmě směřují od volné hladiny k výtokovému otvoru. Na volné hladině působí na částice kapaliny tlak  $p_1$ , ve výtokovém otvoru atmosférický tlak  $p_2 = p_a$ . Bernoulliho rovnice mezi místem 1 na volné hladině kapaliny v nádobě a místem 2 v průřezu výtokového otvoru je

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad (6.37)$$

Jestliže plošný obsah  $S_2$  příčného průřezu výtokového otvoru je mnohem menší než plošný obsah  $S_1$  volné hladiny kapaliny v nádobě, tedy  $S_2 \ll S_1$ , z rovnice kontinuity  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  plyne  $v_1 \ll v_2$  a proto také  $\frac{\rho v_1^2}{2} \ll \frac{\rho v_2^2}{2}$



Obr. 6.13

Potom můžeme zanedbat druhý člen na levé straně poslední rovnice a aproximovaná výtoková rychlost je

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2g(h_1 - h_2)} \quad (6.38)$$

Je-li nádoba s kapalinou otevřena, tj.  $p_1 = p_2 = p_a$ , pak se vztah redukuje na

$$v_2 = \sqrt{2gh} , \quad (6.39)$$

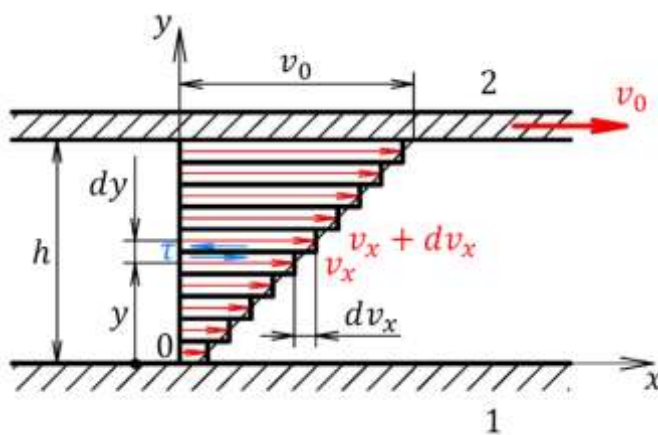
kde  $h = h_1 - h_2$  je hloubka výtokového otvoru pod volnou hladinou kapaliny a  $g$  je tíhové zrychlení. Vztah (6.39) se nazývá **Torricelliho vzorec**. Vidíme, že výtoková rychlost  $v_2$  je stejná jako by byla rychlost hmotného bodu o hmotnosti  $m$  při volném pádu v tíhovém poli Země z výšky  $h$ .

### 6.3.5 Vazká tekutina

Mezimolekulární působení mezi molekulami kapalin a plynů při pohybu způsobuje, že při proudění tekutiny vznikají disipativní síly mezi sousedními vrstvami tekutiny, které se pohybují různými rychlostmi. Tyto síly souvisí s pojmy jako je **vazkost, viskozita, vnitřní tření, tečné napětí**. Mají směr tečny k povrchu stýkajících se vrstev a působí tak, že urychlují pohyb pomalejší vrstvy a zpomalují pohyb rychlejší vrstvy. Lze to vysvětlit oboustrannými přechody molekul mezi sousedními vrstvami. Vrstva tekutiny, která je v bezprostředním styku s pevným tělesem (např. se stěnou potrubí, korytem řeky) se vlivem vnitřního tření mezi kapalinou a pevným tělesem nepohybuje.

Uvažujme dvě desky, mezi nimiž je vrstva tekutiny tloušťky  $h$ , obr. 6.14. Spodní deska 1 je v klidu, horní deska 2 se pohybuje konstantní rychlostí  $\vec{v}_0$  ve směru osy  $x$ . Je-li rychlost horní desky poměrně malá, můžeme si představit, že tekutina proudí ve vrstvách, které se vzájemně nemísí; je to případ laminárního proudění.

Působením vnitřního tření se uvedou do pohybu všechny vrstvy tekutiny s výjimkou vrstvy, která přiléhá ke spodní desce, na níž tekutina lpí. Vrstva tekutiny ve vzdálenosti  $h$ , přiléhající k horní desce 2, je vůči této desce také v klidu vlivem lpění a spolu s ní se pohybuje rychlostí desky  $v_0$ . Působením vnitřního tření se jednotlivé vrstvy pohybují různými rychlostmi, jejichž velikosti jsou úměrné vzdálenosti od spodní pevné desky.



Obr. 6.14 (podle [1])

Dvě sousední vrstvy tekutiny, jejichž rychlosti se liší o  $dv_x$ , a které ve směru  $y$ , kolmém k rychlosti proudu, jsou od sebe vzdáleny o  $dy$ , působí ve stykové ploše na sebe tečným napětím  $\tau$ . Toto tečné napětí je u některých kapalin přímo úměrné gradientu rychlosti  $\frac{dv_x}{dy}$ ,

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (6.40)$$

Tento vztah se nazývá **Newtonův viskózní zákon**.

Konstanta úměrnosti  $\eta$  se nazývá **dynamická viskozita**. Její jednotka je  $[\eta] = \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Podíl dynamické viskozity  $\eta$  a hustoty  $\rho$  kapaliny se nazývá **kinematická viskozita**

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6.41)$$

Jednotkou kinematické viskozity je  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Viskózní síly brání relativnímu pohybu, přemístění sousedních vrstev tekutiny. Tím vzdáleně připomínají síly vznikající na povrchu vzájemně se posouvajících tuhých těles. Proto je viskozita projevem vnitřního tření.

Tekutinám, u nichž je  $\eta$  při dané teplotě konstantní, říkáme **newtonské tekutiny**, pokud  $\eta$  konstantní není, tekutiny jsou **newtonské**.

**Newtonské látky** lze pak ještě dále dělit na látky časově závislé a časově nezávislé a této jejich vlastnosti se využívá v praktických aplikacích. U **časově nezávislých newtonských látek** je viskozita závislá na teplotě a rychlosti její změny. Dále se dělí na:

- Pseudoplastické

Viskozita se zmenšuje, pokud se zvyšuje rychlostí deformace. Příkladem jsou taveniny polymerů.

- Dilatantní tekutiny

Viskozita roste s rychlostí deformace. Jde např. o škrobové suspenze.

- Plastické tekutiny

Tekutiny začínají téct až po vynaložení určité síly. Typickým příkladem jsou kečup, zubní pasta.

U **časově závislých newtonských látek** je viskozita závislá na teplotě, deformaci a času a dělíme je na:

- Tixotropní tekutiny

S dobou působení napětí viskozita klesá, patří mezi ně například nátěrové hmoty.

- Reopexní tekutiny

S dobou působení napětí viskozita roste. Tyto tekutiny jsou vyjimečné.

## 6. MECHANIKA TEKUTIN

### Příklady:

1) Dutá nádoba má ve stěně malý otvor o průměru  $d = 0,1$  mm. Ponoříme-li ji do vody, v jaké hloubce začne voda vnikat otvorem do nádoby. Hustota vody  $\rho = 1000$  kg. m<sup>-3</sup>, povrchové napětí  $\sigma = 0,073$  N.m<sup>-1</sup>

Řešení: V nádobě je atmosférický tlak při hladině. Hydrostatický tlak v místě otvoru je  $p = \rho g z$ , kde  $z$  je kolmá vzdálenost otvoru od hladiny. Kdyby nebylo povrchového napětí (6.7), voda by při ponořování začala vnikat do nádoby hned u hladiny, Ale povrchové napětí podél obvodu otvoru brání vstupu vody. Voda začne vnikat do nádoby teprve, když hydrostatická tlaková síla dosáhne velikosti síly povrchového napětí, takže

$$\rho g z \frac{\pi d^2}{4} \geq \pi d \sigma \Rightarrow z \geq \frac{4\sigma}{\rho g d} = \frac{4 \cdot 0,073}{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,0001} = 0,298 \text{ m}$$

2) Těleso má na vzduchu hmotnost 0,5 kg. Na měřicí pružinu ve vodě působí silou 4,55 N. Určete hustotu tělesa. Hustota vody je  $\rho_v = 1000$  kg. m<sup>-3</sup>.

Řešení: Síla působící na nadlehčované těleso ve vodě  $F_v$  je rovna tíze tělesa zmenšené o vztlačovou sílu (tíhu vytlačené vody) (6.21). Objem tělesa (i vytlačené vody) je  $V = \frac{m}{\rho}$ .

$$F_v = m g - V \rho_v g = m g - \frac{m}{\rho} \rho_v g = m g \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right) \Rightarrow \rho = \frac{\rho_v}{1 - \frac{G_v}{mg}} = \frac{1000}{1 - \frac{4,55}{0,5 \cdot 9,81}} = 13817 \text{ kg.m}^{-3}.$$

3) Do vodorovného potrubí kruhového průřezu o vnitřním průměru 15 cm, kterým protéká voda, je vložen zúžený úsek o vnitřním průměru 10 cm. Ve zúžené části je tlak o 500 Pa nižší než v potrubí. Stanovte rychlosti vody v potrubí a ve zúženém úseku, dále hmotnost a objem vody, která proteče potrubím za jednu hodinu. Hustota vody je  $\rho_v = 1000$  kg. m<sup>-3</sup>.

Řešení: Bernoulliho rovnice (6.37) aplikovaná mezi místem 1 v potrubí a místem 2 ve zúženém úseku:  $p_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$ .

Členy potenciální energie  $mgh$  jsou stejné  $h_1 = h_2$  a z rovnice kontinuity (6.29) dále platí

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_2.$$

---

## 6. MECHANIKA TEKUTIN

---

Tedy  $p_1 + \frac{d_2^2}{d_1^2} \frac{v_2^2}{2} = p_2 + \frac{v_2^2}{2}$  a odtud  $v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{1 - \frac{0,10^4}{0,15^4}}} = 35,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Rychlost vody v potrubí:  $v_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_2 = \frac{0,1^2}{0,15^2} 35,30 = 15,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Objemový tok a hmotnostní tok určíme podle vztahů (6.27) a (6.29)

$$Q_V = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 35,3 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,2772 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}, \quad Q = Q_V \rho = 0,2772 \cdot 1000 = 277,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

a tedy  $V = Q_V t = 0,2772 \cdot 3600 = 998,1 \text{ m}^3$  a  $m = Vt = 998,1 \cdot 1000 = 9,981 \cdot 10^5 \text{ kg}$