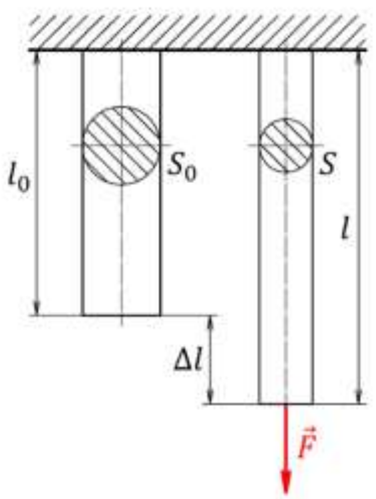
5 Mechanika kontinua

5.1 Vektor napětí, Hookův zákon

5.1.1 Tah a tlak

Při popisu pohybu tuhého tělesa jsme zanedbávali jeho deformaci vlivem působících sil. Úkolem nauky o pružnosti je zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, která v tělesech budí vnější síly. První, jednoduchý, jednorozměrný problém tohoto druhu řešil Robert Hooke. Ve svých pokusech homogenní tyč délky l konstantního příčného průřezu o plošném obsahu S, na jednom konci upevněnou, zatěžoval na druhém konci silou $\vec{F}$ (obr. 5.1). Síla $\vec{F}$ se ruší s reakcí upevnění, a proto je deformovaná tyč v klidu. Každá část zatížené tyče je namáhána stejně velkou silou $\vec{F}$, která způsobila prodloužení tyče o $\Delta l = l - l_0$, přičemž příčný průřez tyče při zatížení silou $\vec{F}$ má plošný obsah $S < S_0$.



Obr. 5.1

Poměr prodloužení tyče Δl k její délce l_0 v nezatíženém stavu, tedy

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}} \qquad (5.1)$$

udává číselně prodloužení tyče jednotkové délky a říkáme mu **relativní** (poměrné) **prodloužení**.

Podíl velikosti působící síly F a plošného obsahu S průřezu tyče kolmého k působící síle

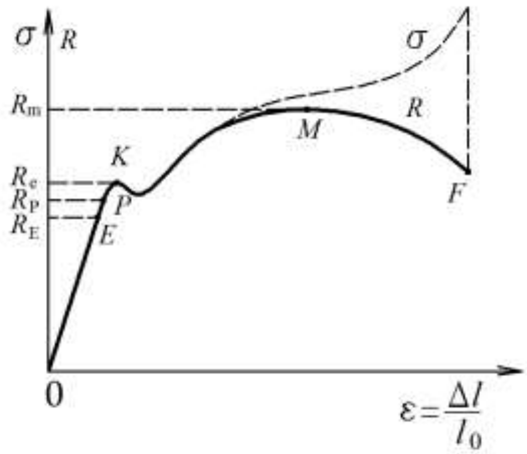
$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}} \tag{5.2}$$

se nazývá **normálové napětí**.

V technické praxi se ještě používá smluvní napětí $R = \frac{F}{S_0}$, kde S_0 je plošný obsah průřezu nezatížené tyče.

Kvalitativní průběh závislosti napětí na relativním prodloužení ε je dán **křivkou deformace** na obr. 5.2Obr. 5.2. Tento diagram experimentálně zjistíme, budeme-li tyč na obr. 5.1 zatěžovat postupně rostoucí silou F a zjišťovat příslušné relativní prodloužení ε.

- Počáteční lineární průběh závislosti v intervalu mezi body 0-E platí jen do **meze úměrnosti** R_E.
- Zatěžujeme–li tyč dále, dosáhneme **meze pružnosti**, která se zpravidla mnoho neliší od meze úměrnosti. V úseku do bodu P platí, že snižujeme-li opět zatížení tyče až do úplného odlehčení, probíhá závislost R, σ na ε po prakticky stejné křivce, jako když v tomto oboru zatížení rostlo. V tomto oboru se látka chová jako téměř dokonale pružná.



Obr. 5.2 [1]

- Zatěžujeme-li materiál nad mez pružnosti R_P, zjistíme po odlehčení tyče, že její deformace nezmizí úplně, ale že zůstává jistá **trvalá deformace**, kterou nazýváme též **plastickou deformací**. Napětí R_e příslušné bodu K nazýváme **mezí kluzu**. Při tomto napětí se tyč prodlužuje, aniž se její zatížení (napětí) zvětšuje. Fyzikální vlastnosti materiálu se začínají měnit a materiál se zpevňuje.

- Při dalším zvyšování napětí tyče roste její deformace až napětí dosáhne nejvyšší hodnoty, **meze pevnosti** v tahu R_m materiálu (bod M).

Další průběh závislosti napětí na deformaci v $R-\varepsilon$ diagramu je klesající. Tyč se poruší v místě, v němž se při dosažení meze pevnosti začne průřez zužovat. Proto při tomto procesu napětí mezi body $M-F$ opět klesá, neboť je vztaženo na počáteční průřez S_0. Vlivem zmenšení průřezu při namáhání tyče v tahu však skutečné napětí σ v tyči roste, především v místech, kde dochází k místnímu zúžení tyče. V tomto místě tyče dochází konečně i k jejímu přetržení (obr. 5.2, čárkovaná křivka).

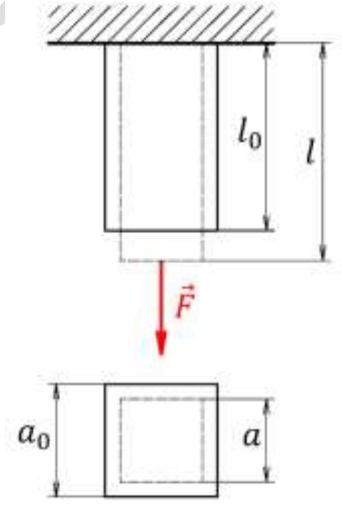
Jestliže po odlehčení tyče nezmizí celá její deformace ihned, ale jen její část, a zbytek deformace až po určité době, říkáme tomuto jevu dopružování, elastická hystereze. To se při opakovaném namáhání materiálu tahem a tlakem projeví na křivce závislosti σ na ε smyčkou, nazývanou **hysterezní smyčka**.

5.1.2 Hookův zákon

Souvislost mezi napětím a deformací materiálu do meze úměrnosti vyjadřuje **Hookův zákon pro tah (tlak)**

$$\boxed{\sigma = \varepsilon E \quad .} \tag{5.3}$$

Konstanta úměrnosti E se nazývá **modul pružnosti v tahu** nebo Youngův modul. Je to konstanta daného materiálu, jejíž velikost nezávisí na tvaru a rozměrech tělesa. Modul E má stejnou jednotku ($\mathrm{N \cdot m^{-2}} = \mathrm{Pa}$) jako napětí σ, neboť ε je veličina bezrozměrná. Hookův zákon platí jen do meze úměrnosti. Hookův zákon platí i pro namáhání tlakem; v tomto případě jsou veličiny σ, Δl a ε záporné.



Obr. 5.3

Tyč namáhaná tahem se nejen prodlužuje, ale současně se také zmenšují její příčné rozměry a tedy i její průřez. Tato deformace je také přímo úměrná napětí.

Tyč čtvercového průřezu na obr. 5.3 se při namáhání tahem silou $\vec{F}$ prodlouží o $\Delta l = l - l_0$ a současně se strany čtvercového průřezu zkrátí z původní šířky a_0, kterou má tyč bez zatížení (nezatížená), na šířku $a < a_0$. Poměr příčného zkrácení tyče $a_0 - a$ a původní

šířky a_0 průřezu tyče je **poměrné příčné zkrácení** η

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}. \tag{5.4}$$

Definujme ještě **Poissonovo číslo**, což je poměr poměrného příčného zkrácení η a poměrného podélného prodloužení ε. Značíme jej μ nebo ν

$$\mu = \nu = \frac{\eta}{\varepsilon}. \tag{5.5}$$

Poissonovo číslo μ udává, kolikrát je poměrné příčné zkrácení η větší než poměrné podélné prodloužení ε.

Vypočítejme ještě změnu objemu $\Delta V = V - V_0$ tyče čtvercového příčného průřezu, způsobenou namáháním tyče tahem silou F na obr. 5.4.

Označíme $V = l\,a^2$ objem tyče napínané silou F a $V_0 = l_0\,a_0{}^2$ objem nezatížené tyče.

Dosadíme–li ze vztahu (5.1) $l = l_0\,(1+\varepsilon)$ a (5.4) $a = a_0\,(1-\eta)$, můžeme psát

$$\Delta V = V - V_0 = l_0\,(1+\varepsilon)\,a_0^2\,(1-\eta)^2 - l_0\,a_0^2 \doteq l_0\,a_0^2\,(\varepsilon - 2\eta) = a_0^2\,\Delta l - 2\,l_0\,a_0\,\Delta a.$$

Zde jsme zanedbali členy druhého a třetího řádu v proměnných ε, η jako relativně malé vzhledem k členům prvního řádu. Pro relativní změnu objemu kolmého hranolu (tyče) při namáhání prostým tahem tedy platí:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V}{l_0\,a_0^2} = \frac{\Delta l}{l_0} - 2\frac{\Delta a}{a_0} = \varepsilon - 2\eta = \varepsilon\,(1-2\nu). \tag{5.6}$$

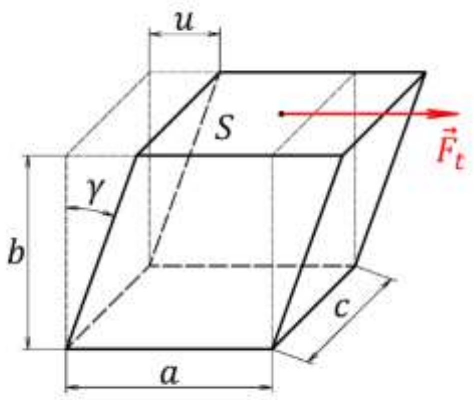
Jelikož při namáhání prostým tahem je $\Delta V > 0$, $\varepsilon > 0$, plyne z posledního výrazu $1 - 2\nu > 0$, tedy $0 < \nu \le 0{,}5$.

5.1.3 Namáhání pružného tělesa smykem

Při namáhání prostým smykem (nebo střihem) se rovnoběžné vrstvy namáhaného materiálu navzájem posouvají, jejich kolmá vzdálenost se však nemění. Na obr. 5.4 je malý, původně kolmý hranolek, namáhán smykem. Jeho výška b nechť je dosti malá, aby nenastal ohyb. Při namáhání hranolku smykem se nezměnila vzdálenost mezi hmotnými částicemi v jednotlivých vrstvách, rovněž se nezměnila vzdálenost mezi vrstvami.

Tečné napětí (napětí ve smyku) τ je podíl tečné síly F_t, působící v rovině S horní stěny hranolku, tj. v tečném směru k ploše S a velikosti této plochy:

$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{a\,c}\,. \tag{5.7}$$



Obr. 5.4

Předpokládáme, že síla F_t je rovnoměrně rozložena po celé ploše $S = a\,c$. Působením síly F_t se horní stěna hranolku posune o malou vzdálenost u (předpokládáme, že dolní stěna hranolku je pevná) takže původně pravý úhel, který svíraly hrany a a b se změní o úhel γ. Pro malé deformace ($\mathrm{tg}\,\gamma \doteq \gamma$)

$$\gamma \doteq \frac{u}{b}\,. \tag{5.8}$$

Tento poměr se nazývá **zkos** (**poměrné posunutí**). Mezi tečným napětím τ a zkosem γ platí **Hookův zákon pro smyk**

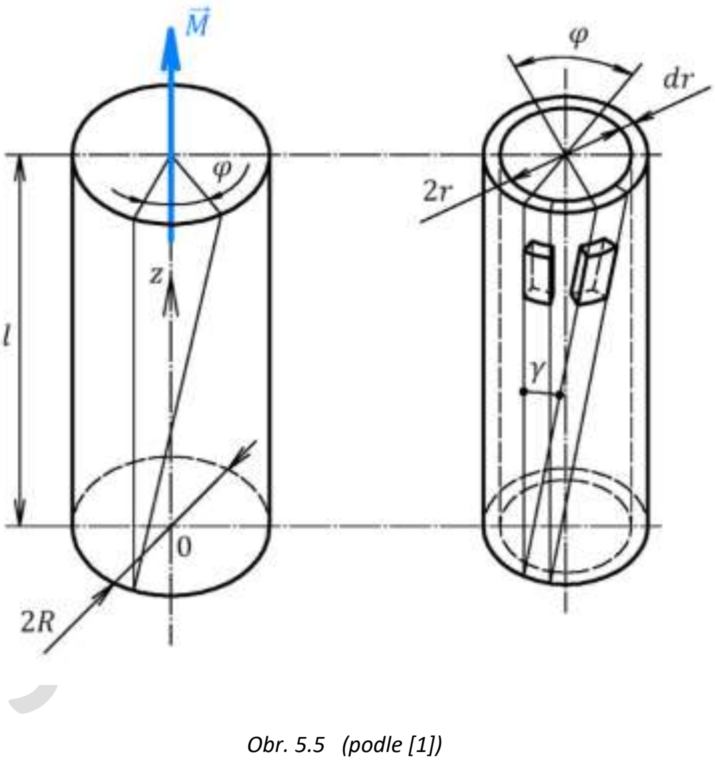
$$\boxed{\tau = G\,\gamma.} \tag{5.9}$$

Konstanta G je **modul pružnosti ve smyku** (modul torze). Je to konstanta daného materiálu; má stejnou jednotku jako napětí $[G]$ = N . m^{-2} = Pa (pascal).

Modul pružnosti ve smyku (modul torze) se uplatňuje při zkrucování (torzi) tyčí. Uvažujme přímou válcovou tyč (přímý kruhový válec) o poloměru R a délce l, jejíž jeden konec je (nepohyblivě) upevněn a na jejím druhém konci silová dvojice vyvolává **kroutící moment** $\vec{M}$ ve směru osy tyče (obr. 5.5). Jiné silové působení, včetně tíhy, neuvažujeme.

Deformace tyče se projevuje pootočením každého příčného průřezu tyče (mimo upevněnou základnu). Přitom předpokládáme, že i při deformaci tyče zůstává každý její příčný průřez rovinným.

Vybereme-li z tyče elementární válcovou vrstvu o poloměru $r < R$ a tloušťce dr, vidíme, že původně kolmý elementární hranolek, omezený dvěma povrchovými přímkami, se při zkrucování tyče deformuje jako hranolek na obr. 5.4. Zkroutí-li se tyč délky l na volném konci o úhel φ, pak je zkos $\gamma = \dfrac{r\varphi}{l}$.



Obr. 5.5 (podle [1])

Tento zkos vzniká tečným napětím τ, které je určeno vztahem (5.9), tedy

$$\tau = G\,\gamma = G\,\frac{r\,\varphi}{l}\,. \tag{5.10}$$

Tečné napětí τ na mezikruží poloměru r a tloušťky dr je dáno podílem tečné síly dF a plochy mezikruží $dS = 2\pi\, r dr$

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2\pi r dr} = \frac{G\,r\,\varphi}{l} \Rightarrow dF = \frac{2\pi G\, r^2\,\varphi}{l}\,dr \tag{5.11}$$

Tečná síla dF má vzhledem k ose tyče elementární moment dM a po dosazení z (5.11) dostaneme

$$dM = r\,dF\sin 90° = \frac{2\pi G\varphi}{l} r^3\,dr. \tag{5.12}$$

Tuto rovnici integrujeme v mezích od $r = 0$ do $r = R$ a dostaneme vztah mezi krouticím momentem M a zkroucením tyče φ ve tvaru

$$\boxed{M = \int_0^R \frac{2\pi G\varphi}{l} r^3\,dr = \frac{\pi G R^4}{2l}\varphi\ .} \tag{5.13}$$

Tento výsledek se často uvádí ve tvaru $M = K\varphi$, kde $K = \frac{\pi G R^4}{2l} = \frac{G}{l} J_p$.

Konstanta úměrnosti K se nazývá **torzní tuhost** tělesa.

Příklad:

Zatížením drátu délky 2 m a plochy průřezu $1.10^{-5}\,\mathrm{m}^2$ závažím hmotnosti 102 kg dojde k prodloužení drátu o $2{,}2.10^{-3}\,\mathrm{m}$. Vypočítejte normálové napětí, relativní prodloužení a Youngův modul pružnosti materiálu.

Řešení: Použijeme Hookův zákon (5.3) a vztahy (5.1) a (5.2).

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{102.10}{10^{-5}} = 1{,}02.10^{8}\,\mathrm{Pa}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{2{,}2.10^{-3}}{2} = 1{,}1.10^{-3} \approx 0{,}11\%$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 9.10^{10}\ \mathrm{Pa}$$