4 Mechanika soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa

Doposud jsme řešili pouze pohyb jednoho hmotného bodu. V mnoha případech ale tento model nestačí, protože tvar, velikost a rozložení hmoty nejsou pro řešení úlohy zanedbatelné. Potom jeden hmotný bod nahradíme **soustavou hmotných bodů,** tedy skupinou ***n* hmotných bodů,** kterou zkoumáme a posuzujeme jako celek. Každý jednotlivý bod, který se může pohybovat volně v prostoru má 3 stupně volnosti, soustava n bodů má tedy $3n$ stupňů volnosti. K úplnému popisu polohy soustavy musíme určit $3n$ pohybových rovnic a stejný počet vedlejších podmínek (tedy $6n$ rovnic), což je často složitá úloha. Počet rovnic lze snížit zavedením určitých vazbových podmínek pro danou soustavu.

4.1 I. věta impulzová, zákon zachování hybnosti

Síly působící na soustavu hmotných bodů dělíme podle původu na dvě skupiny: **vnější** (externí) a **vnitřní** (interní), kterými na sebe působí jednotlivé hmotné body soustavy. Podle 2. Newtonova pohybového zákona je síla $\vec{F}$ působící na i-tou částici o hmotnosti m_i rovna

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{i\,ext} + \vec{F}_{i\,int} \quad , \tag{4.1}$$

Vnitřní síly jsou vždy párové a podle 3. Newtonova zákona je

$$\vec{F}_{ij\,int.} = -\vec{F}_{ji\,int.} \ , \tag{4.2}$$

a proto je součet všech vnitřních sil soustavy roven nule. Pohybová rovnice má pak tvar

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \left(m_i \vec{v}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext.} = \vec{F} \ , \quad . \tag{4.3}$$

kde $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext.}$ je **výslednice všech vnějších sil působících na soustavu**.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext.} \ , \qquad \text{kde} \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \ .} \tag{4.4}$$

Časová změna hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici všech vnějších sil na soustavu působících. Tato věta se nazývá I. věta impulzová.

Zvláštním případem je soustava hmotných bodů, na kterou nepůsobí žádná výslednice vnějších sil. Taková soustava se nazývá **izolovaná**.

Abychom nemuseli zapisovat pro každý hmotný bod soustavy pohybovou rovnici pro vyšetřování pohybu soustavy hmotných bodů definujeme **střed hmotnosti soustavy** jako bod, v kterém je soustředěna celková hmotnost soustavy *m*. Polohový vektor $\vec{r}_S$ středu hmotnosti soustavy je zaveden vztahem

$$m\vec{r}_S = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i \,, \tag{4.5}$$

kde $m = \sum_i m_i$ je celková hmotnost soustavy (sčítáme přes všechny hmotné body soustavy).

Jestliže rovnici (4.5) derivujeme podle času. potom dostaneme vztah

$$m\frac{d\vec{r}_S}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad , \qquad m\vec{v}_s = \sum_i m_i\vec{v}_i \quad , \qquad \text{kde} \quad \vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} \; ,$$

a tedy

$$\vec{v}_S = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{v}_i \quad .$$

(4.6)

Celková hybnost soustavy $\vec{p}$, tj. součet hybností jednotlivých hmotných bodů, je rovna hybnosti středu hmotnosti pohybujícího se rychlostí $\vec{v}_S$.

$$\vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_s \quad . \tag{4.7}$$

Derivováním vztahu (4.7) podle času dostaneme

$$m\vec{a}_s = \sum_i m_i\vec{a}_i \quad , \tag{4.8}$$

kde $\vec{a}_S = \dfrac{d\vec{v}_S}{dt}$ je zrychlení středu hmotnosti

Ze vztahů (4.4) a (4.8) vyplývá

$$m\vec{a}_s = \vec{F} \quad . \tag{4.9}$$

Střed hmotnosti soustavy se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy a působila na něj výslednice všech vnějších sil. Problém soustavy hmotných bodů je možné převést na řešení pohybu jednoho bodu, a to středu hmotnosti soustavy.

Rovnici (4.9) můžeme pro soustavu hmotných bodů znovu přepsat do jednoduchého tvaru

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad . \tag{4.10}$$

Pro případ izolované soustavy, kde $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$, vyplývá z (4.10), že

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \,,$$

a proto (derivace konst.= 0) $\qquad \vec{p} = konst.$ (4.11)

Celková hybnost izolované soustavy je konstantní.

Vztah (4.11) vyjadřuje **zákon zachování hybnosti** a je jedním ze základních fyzikálních zákonů. Jeho platnost v mechanice je širší než platnost zákona zachování celkové mechanické energie, který platí jen pro konzervativní síly.

4.2 Moment síly a moment hybnosti, II. věta impulzová

Kromě účinků časových (impulz síly), dráhových (konání práce) může mít síla i otáčivý účinek. Otáčivý účinek síly $\vec{F}$ vzhledem ke zvolenému bodu O je charakterizován momentem $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ vzhledem k bodu O, nazvanému **momentový bod,** obr. 4.1. **Moment síly** $\vec{M}$ hmotného bodu ke zvolenému bodu O je definován vektorovým součinem polohového vektoru $\vec{r}$ působiště síly a síly $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,. \tag{4.12}$$

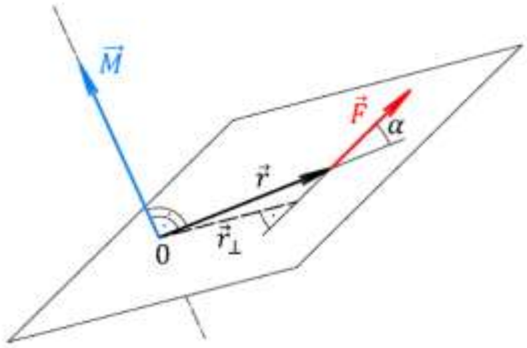
Opět zde záleží na pořadí jednotlivých vektorů v součinu, které nelze zaměnit (vlastnosti vektorového součinu kap. 1) Směr vektoru $\vec{M}$ určíme pravidlem pravé ruky a je kolmý na rovinu, v níž leží vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$.

Velikost momentu síly určíme jako velikost vektorového součinu

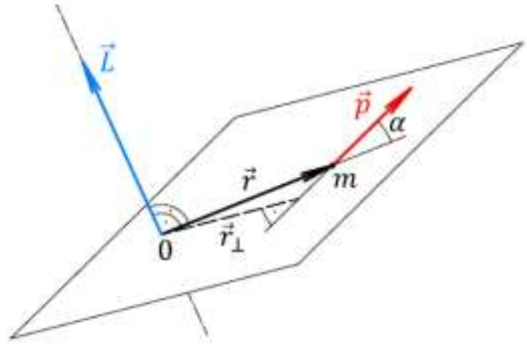
$$M = rF\sin\alpha \quad . \tag{4.13}$$

Moment hybnosti $\vec{L}$ hmotného bodu vzhledem k bodu 0 (obr. 4.2) je definován vektorovým součinem polohového vektoru $\vec{r}$ hmotného bodu, vedeného z bodu 0 a hybnosti $\vec{p} = m\vec{v}$ hmotného bodu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad . \tag{4.14}$$



Obr. 4.1



Obr. 4.2

Podobně jako jsme odvozovali vztah mezi sílou a hybností (kapitola 3), odvodíme i vzájemný vztah mezi momentem síly a momentem hybnosti. Platí

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} . \tag{4.15}$$

Časová změna momentu hybnosti (derivace (4.14) podle času) je rovna (vektorový součin derivujeme podle pravidel derivování součinu - kapitola 2)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad .} \tag{4.16}$$

Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna výslednému momentu výslednice vnějších sil. Podmínkou rovnosti je, že moment hybnosti a moment síly je určován vzhledem k témuž bodu.

Pro soustavu hmotných bodů musíme opět uvažovat působení sil vnějších i vnitřních.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji\,int} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad . \tag{4.17}$$

Jelikož vnitřní síly $\vec{F}_{ji\,int}$, kterými na sebe působí *i*-tý a *j*-tý bod jsou podle 3. Newtonova pohybového zákona stejně velké a opačného směru a za předpokladu, že hmotný bod nepůsobí sám na sebe, je výsledný moment síly vnitřních sil nulový (výslednice vnitřních sil v soustavě nezpůsobí její rotaci). Matematicky to lze dokázat takto:

$$\begin{gathered} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji\,int} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij\,int} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji\,int} + \vec{r}_j \times \left(-\vec{F}_{ji\,int}\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ji\,int} \\ \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \parallel \vec{F}_{ji\,int} \quad \Rightarrow \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji\,int} = 0 \quad . \end{gathered} \tag{4.18}$$

A tedy potom platí vztah

$$\boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad .} \tag{4.19}$$

kde $\sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext}\right)$ **je výslednice momentů všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů, je rovna časové změně celkového momentu hybnosti a nazývá se II. impulsová věta.**

Pokud je soustava izolovaná, potom celkový moment hybnosti izolované soustavy je konstantní.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{L} = \mathit{konst}. \tag{4.20}$$

Vztah (4.20) vyjadřuje **zákon zachování momentu hybnosti**.

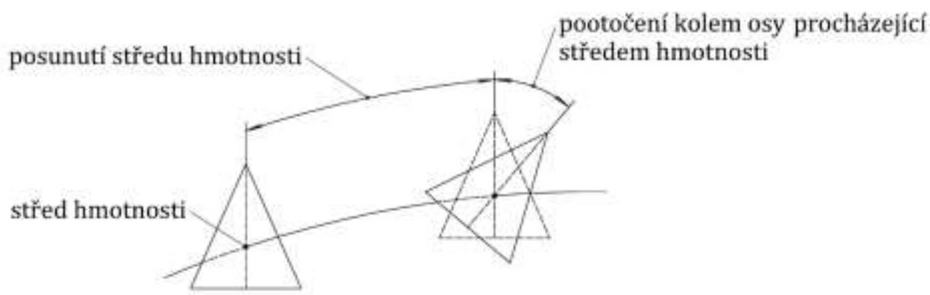
4.3 Tuhé těleso

Dosud jsme při řešení problémů vystačili s představou hmotného bodu, případně soustavy hmotných bodů, tedy s představou nedeformovatelného tělesa, jehož rozměry můžeme zanedbat. Jestliže si jako další úlohu vybereme například hod míčem, už nám tato představa pro popis pohybu nestačí. Míč může při svém pohybu i rotovat a deformovat se. Na pohybující se těleso musíme tedy nahlížet jako na soustavu částic, přesněji, musíme ji rozdělit na jednotlivé části, jejichž rozměry jsou tak malé, že změnu rychlosti ani zrychlení v rámci jednotlivé části není třeba uvažovat. Pokud zanedbáme deformaci tělesa, a bude tedy platit, že **vzdálenost dvou hmotných bodů (elementů) zůstává konstantní**, potom ho nazýváme **tuhé těleso.** Ačkoliv všechna tělesa v přírodě jsou deformovatelná, představa tuhého tělesa jako idealizujícího modelu je velice užitečná, protože zjednodušuje analýzu pohybu.

Tuhé těleso je tedy soustava hmotných bodů, která má díky podmínce konstantní vzdálenosti dvou bodů **snížený počet stupňů volnosti**. Zvolme si v této soustavě libovolný hmotný bod. Můžeme ho považovat za volný a má tedy 3 stupně volnosti. Ale jakýkoliv druhý bod už musí splňovat požadavek konstantní vzdálenosti od prvního bodu, a proto se může pohybovat jen po povrchu koule, jejíž poloměr je daná vzdálenost. Pohybu po ploše odpovídají 2 stupně volnosti. Libovolný třetí bod je omezen ještě více, protože musí udržovat konstantní vzdálenost od prvního i druhého bodu. Může se tedy pohybovat jen po kružnici se středem na spojnici prvního a druhého bodu. Pohybu po křivce přísluší 1 stupeň volnosti. Každý další bod už nemá žádný stupeň volnosti.

Každé tuhé těleso, složené nejméně ze tří hmotných bodů, má tedy 6 stupňů volnosti. K určení jeho pohybového stavu je třeba řešit 2 vektorové (6 skalárních) rovnice a znát 12 okrajových podmínek.

Pomocí jednoduchých úvah dokážeme, že pro tuhé těleso lze v každém okamžiku změnu polohy složit z **translačního pohybu a rotačního pohybu, například pohybu středu hmotnosti** soustavy a **rotace tělesa** kolem okamžité osy procházející tímto středem. Toto tvrzení ilustruje i obr. 4.3.



Obr. 4.3 (podle [2])

Tuhé těleso tedy popisujeme jako soustavu hmotných bodů, které se nemohou vůči sobě pohybovat. Těleso rozdělíme na elementy o hmotnosti *dm* a objemu *dV*, jejichž rozměry musí být zanedbatelně malé vůči rozměrům celého tělesa. Pro každý element o hustotě ρ (hustota je konstantní, nebo je její změna v objemu *dV* zanedbatelně malá) platí:

$$dm = \rho \, dV \quad . \tag{4.21}$$

Protože je v tuhém tělese takových elementů nekonečně mnoho, nemůžeme stanovit jejich počet a tedy je sečíst. Součty v rovnicích pro soustavu hmotných bodů přechází v integrály. Pro celkovou hmotnost tělesa m platí:

$$m = \int_m dm = \int_V \rho \, dV \tag{4.22}$$

4.3.1 Dynamika pohybu tuhého tělesa

Pohyb tuhého tělesa je složitější než pohyb hmotného bodu, protože tuhé těleso se kromě translačního pohybu může ještě otáčet.

Translace (posuvný pohyb) je pohyb, při kterém libovolná přímka pevně spojená s tělesem zachovává v prostoru směr. Trajektorie všech bodů tělesa při translačním (posuvném) pohybu jsou stejné a body se pohybují stejnou okamžitou rychlostí. Při **translaci** tuhého tělesa mají všechny jeho body v témže okamžiku stejnou rychlost a stejné zrychlení a jejich trajektorie mají stejný tvar. Translační pohyb je proto popsán pohybem jediného jeho bodu, jímž nejčastěji volíme hmotný střed (těžiště) tuhého tělesa. Posuvný pohyb lze vyšetřovat jako pohyb jediného hmotného bodu.

Rotace tělesa je pohyb, při kterém zůstává v klidu přímka v tělese. Pokud je poloha této přímky v čase konstantní, pak se jedná o rotaci kolem pevné osy. Jestliže se poloha této přímky s časem mění, jedná se o rotaci kolem okamžité osy. Při rotaci kolem pevné osy opisují body tuhého tělesa kružnice o různých poloměrech (s výjimkou osy rotace, na níž zůstávají body v klidu) v rovinách kolmých na osu rotace. Jejich obvodové rychlosti závisejí na vzdálenosti bodů od osy rotace. **Úhlové rychlosti jsou pro všechny hmotné body tělesa stejné.**

Translační pohyb tuhého tělesa

Translační pohyb středu hmotnosti soustavy byl diskutován v kapitole 4.1 a pohybovou rovnicí středu hmotnosti je rovnice (4.9). Velikost zrychlení hmotného středu se rovná velikosti působící síly dělené celkovou hmotností soustavy. Vztah

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} \quad , \tag{4.23}$$

kde $\vec{F}$ je výslednice všech vnějších sil, je **pohybovou rovnicí hmotného středu, který reprezentuje celé těleso.**

Těžiště a střed hmotnosti tuhého tělesa

Představme si těleso, které je rozděleno do velmi malých částí tak, abychom je mohli považovat za hmotné body. Síla, kterou na každý hmotný bod působí homogenní tíhové pole, je $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$. Výslednou sílu působící na těleso dostaneme vektorovým součtem všech sil

$$\vec{G} = \sum_i m_i\vec{g} \quad . \tag{4.24}$$

Působiště síly umístíme do bodu, který nazveme **těžiště.** Jeho polohový vektor $\vec{r}_T$ lze najít z podmínky rovnosti výsledného momentu síly $\vec{G}$ a součtu momentů jednotlivých hmotných bodů (ke kterémukoliv bodu tělesa, například k počátku soustavy souřadnic).

$$\vec{r}_T \times \vec{G} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{G}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \ , \tag{4.25}$$

což lze upravit na

$$\vec{r}_T m \times \vec{g} = \sum_i \vec{r}_i m_i \times \vec{g} \ . \tag{4.26}$$

Tato rovnice platí i pro obecné těleso, a proto

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \sum_i \vec{r}_i m_i \ , \tag{4.27}$$

Výraz pro $\vec{r}_T$ je shodný s rovnicí (4.5) pro polohový vektor hmotného středu, a proto $\vec{r}_T = \vec{r}_s$.

S použitím vztahu (4.22) dostaneme výraz pro výpočet těžiště tuhého tělesa ve tvaru

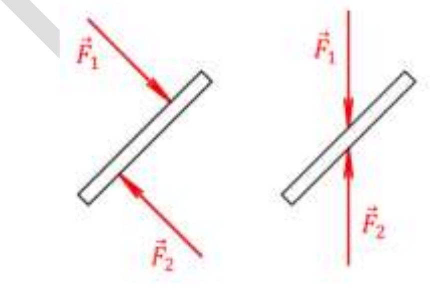
$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r} dm \ . \tag{4.28}$$

Poloha těžiště je pro homogenní tíhové pole totožná s hmotným středem soustavy.

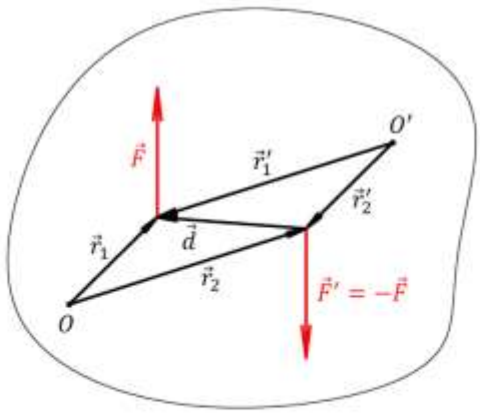
Rovnice (4.28) představuje tři složkové rovnice pro souřadnice x_T, y_T, z_T. Polohu těžiště tuhého tělesa můžeme stanovit buď experimentálně nebo výpočtem.

Síly a jejich skládání

Jestliže částice (hmotný bod) je v rovnováze, to znamená, že se nachází v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, znamená to, že výslednice všech vnějších sil, které na ni působí je nulová. Ukazuje se, že tato podmínka (nulová vnější síla) není postačující pro rovnováhu tuhého tělesa. Na obr. 4.4 je tuhé těleso ve tvaru volné tyče, na které působí dvě stejně velké síly, v prvém případě mají různé působiště, v druhém případě působí v jedné přímce. V prvém případě budou síly tyč natáčet, v druhém případě nikoliv. Rotační účinky síly vzhledem k bodu v prostoru jsme již popsali v odstavci 4.2 a zavedli jsme vztahem (4.12) veličinu **moment síly**.



Obr. 4.4



Obr. 4.5

Dvě rovnoběžné síly, stejně veliké a opačné orientace s působišti na dvou různých přímkách se nazývají **silová dvojice** (obr. 4.4).

Moment silové dvojice působící na tuhé těleso můžeme vypočítat jako součet momentů sil vzhledem k libovolně zvolenému bodu *O*

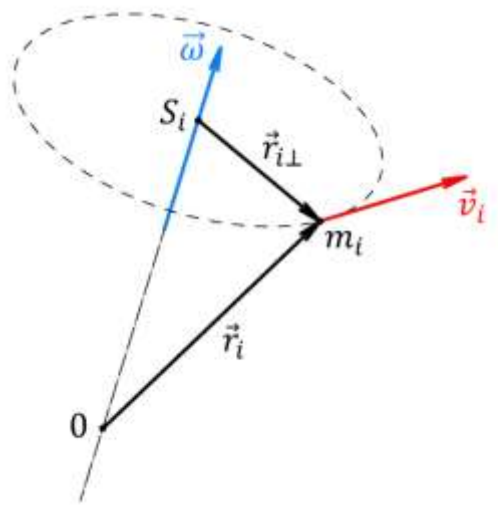
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} \quad . \tag{4.29}$$

Vektor $\vec{d}$ je orientován od působiště síly $-\vec{F}$ k působišti síly $\vec{F}$. Moment silové dvojice, jak vyplývá z obr. 4.5 a ze vztahu (4.29) nezávisí na volbě bodu *O*.

V obecném případě, kdy na tuhé těleso působí různě velké síly různého směru, můžeme použít několik základních pravidel pro přesun a skládání sil. Působiště každé síly můžeme libovolně posunout po přímce, v které působí. Dynamický účinek síly na těleso se tím nezmění. Síly, které mají působiště ve společném bodu, můžeme vektorově složit. Aplikujeme-li uvedené postupy na síly $\vec{F}_1 .... \vec{F}_n$ působící na tuhé těleso v různých bodech, můžeme jejich působiště přesunout do hmotného středu soustavy, kde je vektorově složíme ve výslednou sílu. Všechny silové dvojice charakterizujeme jejich momenty a rovněž je všechny přesuneme do libovolného bodu tělesa a stanovíme výsledný moment.

Rotační pohyb tuhého tělesa

Rotační pohyb tuhého tělesa **kolem pevné osy** v prostoru jsme kinematicky řešili již v kapitole 3 pro hmotný bod (body konají kruhový pohyb) a zavedli jsme všechny potřebné veličiny, tedy kromě okamžité rychlosti $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$, ještě úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ a úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$**.**



Obr. 4.6

Všechny body tuhého tělesa, které neleží na ose otáčení, se pohybují po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení a jejichž roviny jsou kolmé k ose otáčení (obr. 4.6). Poloměr $r_{i\perp}$ kružnice, po níž se pohybuje hmotný bod m_i tuhého tělesa, se rovná konstantní vzdálenosti tohoto bodu od osy otáčení. Okamžitá poloha hmotného bodu na kružnici je určena jedinou souřadnicí, a to středovým úhlem $\varphi = \varphi(t)$, měřeným od jistého základního směru. Zvolíme -li pro všechny hmotné body tuhého tělesa neležící na ose otáčení totéž $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ pro $t = 0$ (zpravidla volíme $\varphi(t=0) = 0$), je poloha všech bodů tuhého tělesa určena funkcí $\varphi(t)$, takže počet stupňů volnosti tuhého tělesa při otáčení kolem pevné osy je roven 1. Úhlová rychlost $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ všech hmotných bodů tuhého tělesa., které neleží na ose otáčení, je proto v témž okamžiku stejná. Všechny hmotné body tuhého tělesa mají v témž okamžiku i stejné úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{4.30}$$

Obvodová rychlost $\vec{v}_i$ i-tého hmotného bod tuhého tělesa je určena vektorovým součinem

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp} \,. \tag{4.31}$$

Obvodová rychlost není tedy pro všechny body stejná, je funkcí kolmé vzdálenosti hmotného bodu tuhého tělesa od osy otáčení.

4.3.2 Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy, moment setrvačnosti tuhého tělesa

Nutná podmínka, která musí být splněna, aby tuhé těleso nerotovalo, je podle (4.29) nulový moment vzhledem k libovolnému bodu tělesa. Všimněme si, že ačkoliv je to podmínka nutná, není postačující k tomu, aby se těleso nacházelo v klidu. Jestliže těleso již rotuje kolem pevné osy a nepůsobí žádný vnější moment síly, těleso bude pokračovat v rotaci s konstantní úhlovou rychlostí. S analogickou situací jsme se již setkali v případě posuvného pohybu, kdy těleso může také setrvávat v pohybu rovnoměrně přímočarém, i když na něj nepůsobí žádná vnější síla.

Kinetická energie E_k tělesa je rovna součtu kinetických energií všech hmotných bodů tělesa:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{nebo} \quad E_k = \frac{1}{2}\int_V v^2 \rho \, dV, \tag{4.32}$$

kde m_i je hmotnost a v_i je velikost rychlosti i-tého hmotného bodu a n je celkový počet hmotných bodů v tělese. Druhý ze vztahů (4.32) platí pro kinetickou energii tělesa, které pokládáme za spojité těleso (kontinuum), v němž rozložení hmotnosti je určeno hustotou $\rho = \rho(x, y, z)$. Ta je obecně funkcí souřadnic x, y, z bodů tělesa, které má objem V.

a) **těleso koná translační (posuvný) pohyb**, takže všechny hmotné body tělesa i jeho hmotný střed mají stejnou rychlost $\vec{v}$ o velikosti $|\vec{v}| = v$. Dosadíme-li ve vztahu (4.32) $v_i = v$, bude

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v^2, \tag{4.33}$$

kde $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ je celková hmotnost tělesa. Kinetická energie tuhého tělesa při translačním pohybu je rovna kinetické energii veškeré hmotnosti tělesa soustředěné v jeho hmotném středu (těžišti).

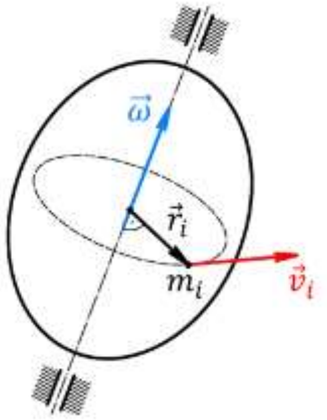
b) **těleso se otáčí kolem pevné osy**. Otáčí-li se těleso kolem pevné osy (obr. 4.7) okamžitou úhlovou rychlostí o velikosti ω, mají hmotné body ve vzdálenosti r_i od osy ($r_i \equiv r_{i\perp}$) obvodové rychlosti o velikosti $v_i = \omega r_i$. Z tohoto vztahu dosadíme za v_i do rovnice (4.33) a pro celkovou kinetickou energii rotujícího tělesa dostaneme (ω = *konst.*)

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{4.34}$$

Veličinu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J \tag{4.35}$$

nazýváme **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose rotace.



Obr. 4.7

Budeme–li opět předpokládat, že hmotnost je v tělese rozložena spojitě, potom hmotností částice rozumíme hmotnost *dm* objemového elementu *dV*. Je-li ρ hustota tělesa v místě objemového elementu o objemu dV, je hmotnost dm objemového elementu rovna $dm = \rho\, dV$, suma v (4.35) přejde v integrál

$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2\, dm = \int_{(V)} \rho r^2\, dV} \quad , \tag{4.36}$$

kde obecně ρ je funkcí souřadnic a r je kolmá vzdálenost části dm od osy otáčení. Integrace se provádí přes celou hmotnost m tělesa, popř. přes celý jeho objem V.

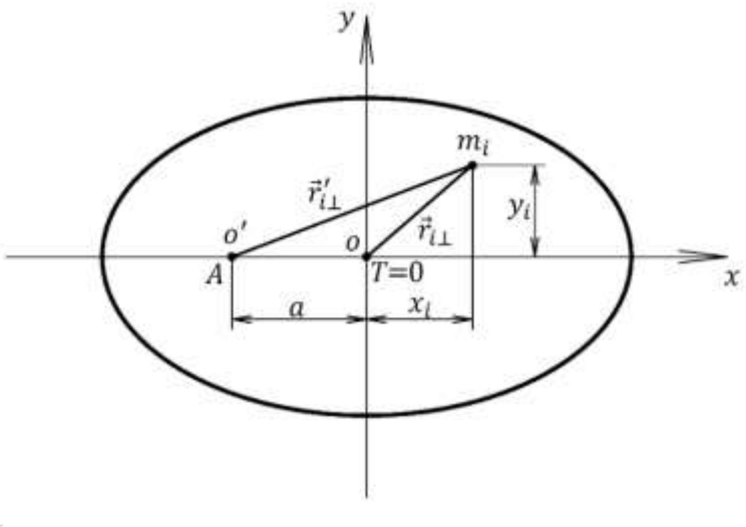
Jednotkou momentu setrvačnosti je [J] = kg . m^2.

Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy je tedy po zavedení momentu setrvačnosti rovna :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J \omega^2.} \tag{4.37}$$

Steinerova věta

V tělese na obr. 4.8 uvažujme dvě vzájemně rovnoběžné osy kolmé k nákresně, z nichž osa o je pro jednoduchost osa z kartézské soustavy souřadnic, jejíž počátek 0 je v těžišti tělesa $T \equiv 0$.



Obr. 4.8

Moment setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k ose o procházející těžištěm T tělesa je podle (4.34) roven

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_{i\perp}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\, (x_i^2 + y_i^2)\,. \tag{4.38}$$

Moment setrvačnosti J téhož tělesa vzhledem k ose o' jdoucí bodem A rovnoběžně s osou o (na obr. 4.8 jsou tyto osy kolmé na rovinu xy) je podle obr. 4.8 roven

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_{i\perp}'^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(a+x_i)^2+y_i^2]=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(a^2+2ax_i+x_i^2+y_i^2)=$$

$$=a^2\sum_{i=1}^{n} m_i+2a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i+\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i^2+y_i^2). \qquad (4.39)$$

Protože počátek soustavy souřadnic je v těžišti ($x_T=0$), je podle (4.27) $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m x_T = 0$,

$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ je celková hmotnost a pokud označíme $\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i^2+y_i^2)=J_0$, potom lze rovnici (4.39) přepsat do tvaru:

$$J=J_0+m\,a^2 \qquad (4.40)$$

Tato rovnice se nazývá **Steinerova věta**, *a* je vzdálenost **obou rovnoběžných os** *o* a *o′*. Moment setrvačnosti J tělesa vzhledem k libovolné ose je roven součtu momentu setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm a součinu hmotnosti ma^2 . Ze vzorce (4.40) je zřejmé, že ze všech rovnoběžných os **nejmenší moment setrvačnosti má těleso vzhledem k ose, která prochází těžištěm**.

4.3.3 Pohybové rovnice a statická rovnováha tuhého tělesa

Translační pohyb

Rovnice (4.41) je **pohybovou rovnicí translačního pohybu hmotného středu (těžiště), který reprezentuje celé těleso.**

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=m\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}=\frac{d\vec{p}}{dt}\\ \vec{p}=m\vec{v}_s \quad ,\end{gathered}} \qquad (4.41)$$

kde $\vec{F}$ je výslednice všech vnějších sil, působících na tuhé těleso, $\vec{r}_s$ a $\vec{v}_s$ je polohový vektor a rychlost hmotného středu (těžiště), $\vec{p}$ hybnost a *m* hmotnost tuhého tělesa.

Rotační pohyb

U translačního pohybu je síla úměrná hmotnosti a zrychlení tělesa. Lze podobný tvar napsat i pro rotační pohyb a moment síly? Pokud uvážíme pro jeden hmotný bod, že $\vec{r}\perp\vec{\omega} \;\Rightarrow\; (\vec{r}\cdot\vec{\omega})=0$ a pro dvojitý vektorový součin platí vztah $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ potom:

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right)}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}_i \times m_i\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right)}{dt} = m_i \frac{d\left(\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right)}{dt} =$$

$$= m_i \frac{d\left(\vec{\omega}\left(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\right) - \vec{r}_i\left(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}\right)\right)}{dt} = m_i \frac{d\left(\vec{\omega}\left(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\right) - 0\right)}{dt} = m_i r_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J_i \vec{\varepsilon} \ ,$$

(4.42)

kde J_i je moment setrvačnosti *i*-tého bodu, $\vec{\varepsilon}$ jeho úhlové zrychlení a m_i jeho hmotnost. Tuto rovnici lze zobecnit i pro soustavu hmotných bodů i pro tuhé těleso

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{M} \\ \vec{L} = J\vec{\omega} \ ,\end{gathered}} \tag{4.43}$$

kde $\vec{M}$ je výsledný moment všech vnějších sil, působících na tuhé těleso, $\vec{\omega}$ a $\vec{\varepsilon}$ jsou vektory úhlového rychlosti a úhlového zrychlení, $\vec{L}$ moment hybnosti a J moment setrvačnosti tuhého tělesa.

Rovnice (4.43) je **pohybovou rovnicí rotačního pohybu tuhého tělesa.**

Výsledná síla $\vec{F}$ umístěná ve středu hmotnosti určuje translační pohyb tuhého tělesa a výsledný moment $\vec{M}$ určuje rotační pohyb tělesa.

Kinetická energie tělesa konajícího translační i rotační pohyb

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} m v_s^2 \ .} \tag{4.44}$$

Ukázali jsme, že silové působení vnějších sil na tuhé těleso můžeme vždy převést na jednu sílu, která způsobuje translaci tělesa a jednu dvojici sil, která způsobuje jeho rotaci.

K tomu, aby nastala **rovnováha** tuhého tělesa, musí být:

Výslednice vnějších sil nulová

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = 0 \ .} \tag{4.45}$$

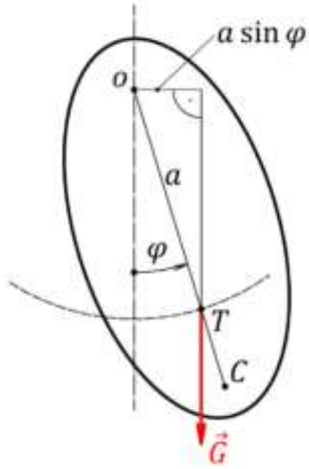
Výsledný moment sil nulový

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_i = \sum\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = 0 \ ,} \tag{4.46}$$

kde $\vec{r}_i$ jsou polohové vektory působiště sil $\vec{F}_i$ k libovolně zvolenému bodu. Platnost rovnice (4.46) nezávisí přitom na bodu, ke kterému stanovíme $\vec{M}$.

4.3.4 Kyvadlo

Fyzické (fyzikální) kyvadlo je každé těleso otočné kolem pevné, zpravidla vodorovné osy *o*, neprocházející jeho těžištěm, nacházející se v tíhovém poli. Kyvadlo je v rovnováze, je-li jeho těžiště v nejnižší poloze, tj. pod osou leží na přímce protínající osu *o*. V této poloze je moment tíhy $\vec{G}$ tělesa k ose *o* roven nule.



Obr. 4.9

Uvažujme kyvadlo otočné bez tření kolem vodorovné osy *o*, obr. 4.9.

- Je-li úhel φ okamžitá **úhlová výchylka** kyvadla z rovnovážné polohy, pak tíha kyvadla $\vec{G} = m\vec{g}$ která má působiště v těžišti T, působí na kyvadlo momentem

$$M = -G\,a\sin\varphi = -m\,g\,a\sin\varphi \quad , \tag{4.47}$$

  Kde a sinα je kolmá vzdálenost těžiště od osy, m hmotnost fyzického kyvadla a g tíhové zrychlení.

- Moment M tíhy kyvadla G působí proti výchylce φ a snaží se přivést kyvadlo zpět do rovnovážné polohy a proto je ve výrazu (4.47) pro moment M záporné znaménko. Působením momentu M koná kyvadlo otáčivý pohyb kolem pevné osy, takže pro něj platí pohybová rovnice (4.43)

$$M = J\varepsilon = J\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = -m\,g\,a\,\sin\varphi, \tag{4.48}$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení.

Pokud je maximální výchylka kyvadla z rovnovážné polohy relativně malá ($\varphi < 5°$), můžeme v každém okamžiku v (4.48) položit $\sin\varphi \doteq \varphi$ (úhel φ na pravé straně musí být v radiánech), a po vydělení rovnice (4.48) momentem setrvačnosti *J* dostaneme

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J}\varphi = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \quad \text{kde} \quad \omega^2 = \frac{mga}{J} \quad .} \tag{4.49}$$

rovnice je formálně shodná s diferenciální rovnicí pro harmonický pohyb (kterou budeme řešit v kapitole 7), v níž je místo úhlové výchylky φ výchylka *x*. Při malých výchylkách $\varphi < 5°$ kyvadla lze tedy jeho pohyb pokládat přibližně za harmonický pohyb, $\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, jehož **úhlová frekvence** je rovna

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad , \tag{4.50}$$

a frekvence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$. Pro dobu kmitu T (perioda) kyvadla platí:

$$T = \boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \quad .} \tag{4.51}$$

Matematické kyvadlo je hmotný bod hmotnosti *m*, upevněný na konci tuhého přímého vlákna konstantní délky *l*, jehož hmotnost je zanedbatelná, a který se otáčí kolem pevné vodorovné osy procházející druhým koncem vlákna. Moment setrvačnosti kyvadla, rovný součinu hmotnosti bodu a čtverce jeho vzdálenosti od vodorovné osy, kolem níž kyvadlo kývá, je rovný $J = ml^2$. Při malých výchylkách lze pohyb matematického kyvadla pokládat přibližně za harmonický pohyb, jehož doba kmitu je podle vztahu (4.51) (do kterého dosadíme $a = l$) rovna,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad .} \tag{4.52}$$

Redukovaná délka fyzického kyvadla l_r je délka matematického kyvadla, jehož doba kmitu je rovna době kmitu daného fyzického kyvadla.

Porovnáme-li pravé strany rovnic (4.51) a (4.52), dostaneme pro l_r výraz

$$l_r = \frac{J}{ma} > a \quad .$$

(4.53)

V rovnici (4.53) J a m jsou moment setrvačnosti a hmotnost daného fyzického kyvadla, a vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení.

Reverzní kyvadlo je fyzické kyvadlo, které může konat kmitavý pohyb se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných pevných os. Tato podmínka je splněna, jestliže vzájemná vzdálenost těchto os je rovna redukované délce fyzického kyvadla l_r.

Analogie veličin popisujících translační (posuvný) a rotační pohyb:

translační pohyb	**rotační pohyb**
posunutí Δs	úhlové posunutí $\Delta\varphi$
rychlost $\vec{v}$	úhlová rychlost $\vec{\omega}$
zrychlení $\vec{a}$	úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$
hmotnost m	moment setrvačnosti J
hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$	moment hybnosti $\vec{L} = J\vec{\omega}$
síla $\vec{F}$	moment síly $\vec{M}$
výkon $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	výkon $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
pohybová rovnice $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$	pohybová rovnice $\frac{d\vec{L}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$

Příklad:

Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose, která je k tyči kolmá a prochází jejím koncovým bodem.

Řešení: Tyč si rozdělíme na malé elementy o hmotnosti dm, Pokud je tyč tenká (průměr je zanedbatelný vůči její délce), můžeme definovat délkovou hustotu $\lambda = \frac{m}{l}$. Podle rovnice (4.36) platí $J = \int_m r^2 \,\mathrm{d}m = \int_l r^2 \lambda dl$. Orientujeme-li tyč ve směru osy x, s počátkem tyče v počátku soustavy souřadnic, element dx tyče bude ve vzdálenosti x od počátku, potom $J = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l = \frac{1}{3}\frac{m}{l} l^3 = \frac{1}{3} ml^2$.

Pokud bychom určovali moment setrvačnosti vzhledem k ose, procházející těžištěm, postup by byl stejný, jen integrační meze by se změnily od $-\frac{l}{2}$ do $\frac{l}{2}$ .Výsledkem by bylo

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{l}\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{m}{l}\frac{l^3}{8}\right)\right) = \frac{1}{12} ml^2$$

Pak bychom mohli použít k výpočtu příkladu i Steinerovu větu (4.40) pro $a = \frac{l}{2}$ (vzdálenost počátku od těžiště) $J = J_0 + m\,a^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$.