# 3 Mechanika hmotného bodu

**Mechaniku dělíme na kinematiku a dynamiku**. Kinematika se zabývá pouze časovým a prostorovým popisem průběhu pohybu, dynamika zkoumá příčiny pohybu. Podle toho, čeho pohyb popisujeme, ji můžeme dělit na mechaniku **hmotného bodu**, **soustavy hmotných bodů**, **tuhého tělesa** a **kontinua.**

V mechanice **hmotného bodu**, která je nejjednodušší, se pracuje s takovými objekty, jejichž poloha může být popsána polohou jediného bodu. Nemusí to být vždy jen velmi malý objekt (se zanedbatelnými rozměry), záleží spíš na tom, jaký (z hlediska silového působení a rozměru prostoru, v kterém se objekt pohybuje) problém řešíme. Například pohyb Země po téměř kruhové dráze kolem Slunce je možné popsat jako pohyb hmotného bodu, kterým je těžiště zeměkoule, a zanedbat zcela tvar Země a její rotační pohyb.

Představu hmotného bodu lze využít i při popisu pohybu objektu s vnitřní strukturou, který nahradíme a zkoumáme jako **soustavu hmotných bodů**. Atomové jádro, i když je to útvar se zdánlivě zanedbatelnými rozměry (poloměr jádra je řádově $10^{-15}$ m), můžeme při studiu jeho struktury považovat za soustavu hmotných bodů (nukleonů). Jakékoliv **tuhé těleso** můžeme popisovat jako soustavu spojitě rozložených hmotných elementů ovšem s jistým zjednodušením, či spíš idealizací. Zanedbáváme vliv silového působení na vazby mezi jednotlivými hmotnými elementy, tj. předpokládáme, že se těleso nedeformuje. Na soustavu hmotných elementů můžeme aplikovat poznatky získané pro soustavu hmotných bodů.

Studiem pohybu těles, které se působením sil deformují, se zabývá **mechanika kontinua** (spojitého prostředí). Mechanika kontinua řeší i problémy kapalin a plynů.

## 3.1 Kinematika hmotného bodu

### 3.1.1 Poloha, rychlost, zrychlení hmotného bodu

Mechanickým pohybem rozumíme pohyb jednoho tělesa vzhledem k jinému tělesu. Podle toho, ke kterému tělesu pohyb vztahujeme (vztažné těleso) se může jevit různě, pohyb je **relativní**. Všechny zákony dynamiky by ale měly mít obecnou platnost a nezáviset na volbě vztažného tělesa.

K popisu polohy hmotného bodu (tělesa) požíváme soustavy souřadnic spojených se vztažným tělesem. Podle povahy a symetrie pozorovaných pohybů se nejčastěji používá soustava souřadnic kartézská nebo sférická.

# 3. MECHANIKA HMOTNÉHO BODU

Polohu **hmotného bodu** vzhledem ke kartézské vztažné soustavě souřadnic určujeme polohovým vektorem $\vec{r}$ . Pohyb hmotného bodu je tedy úplně popsán, známe-li časovou závislost **polohového vektoru,** Obr. 3.1.

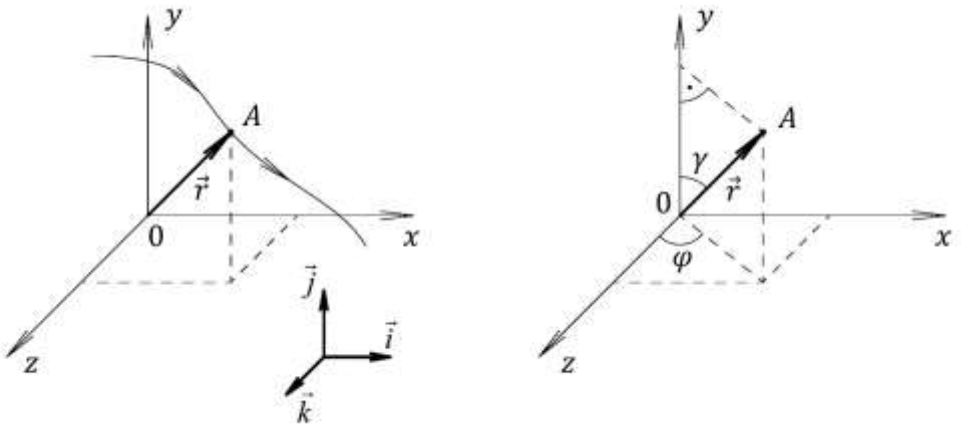
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \tag{3.1}$$

tj. známe-li souřadnice hmotného bodu jako spojité funkce času, potom

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad , \tag{3.2}$$

kde pro velikost vektoru $\vec{r}$ platí $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . (3.3)

Množina bodů, jimiž hmotný bod při svém pohybu postupně prochází, se nazývá **trajektorie** hmotného bodu. Ta je určena rovnicí (3.1) popř. parametrickými rovnicemi (3.2), kde parametrem je čas *t*. Trajektorií tak může být např. přímka, kružnice, parabola, šroubovice. Délka trajektorie se nazývá **dráha**.




*Obr. 3.1*

Kromě kartézských souřadnic (kapitola 2) můžeme pro popis pohybu používat ještě sférické souřadnice. Vztah mezi **kartézskými** souřadnicemi *x*, *y*, *z* a **sférickými** souřadnicemi *r*, $\vartheta$ , $\varphi$ je následující:

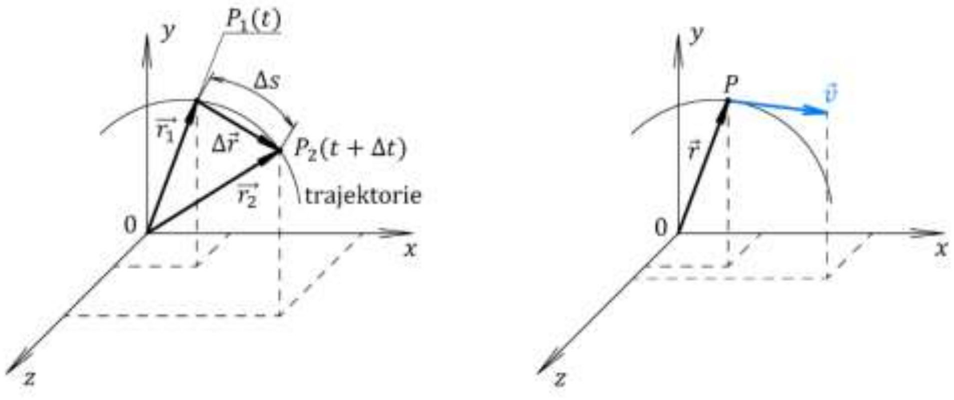
$$\begin{aligned} x &= r \sin\gamma \sin\varphi \\ y &= r \cos\gamma \\ z &= r \sin\gamma \cos\varphi \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad tg\gamma = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{y} \quad ; \quad tg\varphi = \frac{x}{z}$$

## *3. MECHANIKA HMOTNÉHO BODU*

Pro určení polohy volného hmotného bodu obecně v prostoru je třeba znát tři údaje (souřadnice), a proto říkáme, že hmotný bod má tři **stupně volnosti**. Avšak pohyb hmotného bodu může být omezen. Omezení pohybu se nazývá **vazba. Vazba** je jistá podmínka, která zužuje možnost pohybu hmotného bodu jen na určitou plochu nebo křivku. Matematicky se tato vazba vyjadřuje právě rovnicí této plochy nebo křivky. Je-li tedy pohyb hmotného bodu nějak omezen, například je silově vázán k dalšímu bodu, počet stupňů volnosti se zmenšuje. Pohybuje-li se hmotný bod v rovině, má 2 stupně volnosti, pohybuje-li se po křivce, má 1 stupeň volnosti.

Pokud tedy hmotný bod při svém pohybu spojitě mění svoji polohu, jeho pohyb popisujeme polohovým vektorem $\vec{r}$ , určeným rovnicemi (3.2), nebo jedinou vektorovou rovnicí (3.1), kde parametrem je čas. Při změně polohy hmotného bodu z $P_1$ do $P_2$ se změní polohový vektor o $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , obr.3.2. Skutečná délka trajektorie $\Delta s$ , kterou hmotný bod mezi $P_1$ a $P_2$ urazí, není však totožná s $|\Delta\vec{r}|$. Platí, že $\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$ .




*Obr. 3.2*

Rovnost $s = |\Delta\vec{r}|$ platí pouze pro pohyb hmotného bodu po přímce. Definujeme-li **průměrnou rychlost** pomocí změny polohového vektoru

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.5}$$

je zřejmé, že stanovená hodnota střední rychlosti neodpovídá skutečnosti. Budeme-li však zmenšovat časový interval $\Delta t$ (obr. 3.2), bude se $\Delta\vec{r}$ svou velikostí čím dál víc blížit ke skutečnému přírůstku délky dráhy a v limitním přiblížení bude směr $\Delta\vec{r}$ totožný s tečnou v daném bodě. Rychlost $\vec{v}$ definovaná vztahem

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \tag{3.6}$$

se nazývá **okamžitá rychlost** a je obecně funkcí času, $\vec{v} = \vec{v}(t)$. Její velikost je rovna derivaci dráhy podle času a její směr je totožný se směrem tečny k trajektorii v daném bodě. Jednotkou rychlosti je $[v]$ = m.s$^{-1}$.

Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}$ můžeme rozepsat do složek

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\,, \tag{3.7}$$

kde $$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad .$$

Velikost vektoru $\vec{v}$ můžeme určit z velikosti jeho složek s použitím vztahu pro stanovení velikosti vektoru: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Analogicky definujeme **průměrné zrychlení** podobně jako průměrnou rychlost. Změna vektoru okamžité rychlosti $\Delta\vec{v}$ za časový interval $\Delta t$ je rovna:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}\,. \tag{3.8}$$

**Okamžité zrychlení** $\vec{a}$ je definováno:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \tag{3.9}$$

a pro jeho složky platí:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

(3.10)

Velikost vektoru okamžitého zrychlení $\vec{a}$ je rovna $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ . Jednotka $[a]$ = m.s$^{-2}$.

**Okamžitá rychlost může během pohybu měnit svou velikost nebo směr, nebo obojí. Vektor $\vec{a}$ (jeho složky) mohou být tedy obecně funkcí času.**

- Příkladem pohybu, kdy okamžitá rychlost nemění směr ale pouze velikost je rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb.
- Případ, kdy okamžitá rychlost nebude měnit svoji velikost, ale mění pouze směr, odpovídá křivočarému pohybu s konstantní velikostí rychlosti, například rovnoměrnému kruhovému pohybu. Ukážeme, že takovému pohybu přísluší nenulové, tzv. **dostředivé zrychlení**.

### 3.1.2 Druhy pohybů hmotného bodu

Známe-li průběh časové závislosti dráhy hmotného bodu na čase, derivováním určíme jeho rychlost, případně zrychlení jako funkci času. Známe-li naopak závislost zrychlení hmotného bodu jako funkci času, můžeme integrací s využitím **počátečních podmínek**, t.j. údajů o pohybovém stavu tělesa v čase $t_0$, určit rychlost, tvar a délku trajektorie v závislosti na čase.

**a) Pohyb přímočarý hmotného bodu**

- trajektorie pohybu: přímka
- **směr** rychlosti i zrychlení nezávisí na čase
- **velikost** rychlosti a zrychlení se může v čase měnit

Můžeme vždy zvolit souřadnou soustavu tak, aby jedna osa (např. osa $x$) splývala s trajektorií pohybu. Potom v této soustavě můžeme vyjádřit vektory $\vec{r} = (x, 0, 0)$ ; $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ ; $\vec{a} = (a_x, 0, 0)$.
S použitím vztahů (3.7) a (3.10) lze vyjádřit změnu rychlosti a změnu polohy hmotného bodu takto:

$$\begin{aligned} dv_x &= a_x dt \\ dx &= v_x dt \quad . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Provedením integrace těchto rovnic dostaneme vztahy pro $v_x$ a $x$.

Přímočarý pohyb hmotného bodu můžeme dále dělit na :

- pohyb přímočarý **rovnoměrný**

$$a_x = 0 \ , \quad v_x = v_0 = konst., \quad x = \int v_x dt = v_x t + C_1 = v_x t + x_0 \ , \tag{3.12}$$

kde $x_0$ je dráha hmotného bodu v čase $t_0$, $v_0$ je rychlost hmotného bodu v čase $t_0$, $C_1$ integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek.

- pohyb přímočarý **rovnoměrně zrychlený (zpomalený)**

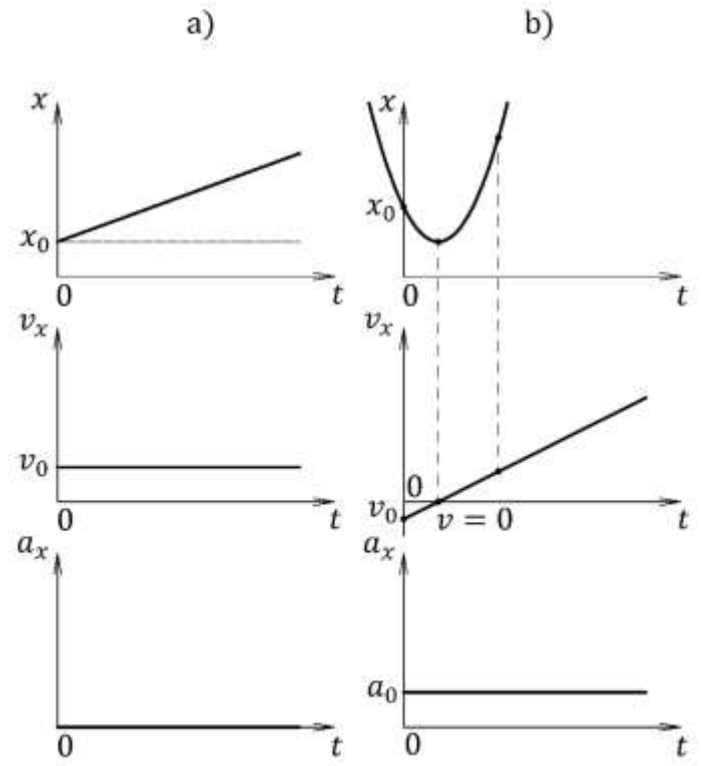
$$\begin{aligned} a_x &= \text{konst.}, \quad v_x = \int a_x dt = a_x t + C_1 = a_x t + v_0 \\ x &= \int v_x dt = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + C_2 = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0 \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde $x_0$ je dráha a $v_0$ je rychlost hmotného bodu v čase $t_0$, $C_1$ a $C_2$ jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek.

Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený je například **svislý vrh** v blízkosti povrchu Země. Pohyb se koná ve směru osy $y$ s počáteční rychlostí $v_{0y}$, která má směr svisle vzhůru. Za zrychlení dosadíme tíhové zrychlení $\vec{a} = -\vec{g}$ . Znaménko (-) vyjadřuje, že $\vec{g}$ míří proti směru osy $y$ , a číselná hodnota $\vec{g}$ je na povrchu Země přibližně rovna 9,81 m.s$^{-2}$.

- pohyb přímočarý **nerovnoměrný** $a = |\vec{a}| \neq \text{konst.}$

Příkladem nerovnoměrného přímočarého pohybu je pohyb harmonický, při kterém $a = a(t)$, tedy $a$ je funkcí času.




*Obr. 3.3 (podle [3])*

Na obr. 3.3 jsou znázorněny závislosti polohy, rychlosti a zrychlení na čase pro přímočarý pohyb ve směru osy $x$, konkrétně za a) je znázorněn pohyb rovnoměrný přímočarý a za b) pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený. Všimněme si, že v souladu se vztahy (3.6) a (3.9) odpovídají časové průběhy rychlosti průběhu derivace polohy podle času, resp. odpovídají časové průběhy zrychlení průběhu derivace rychlosti podle času.

**b) Pohyb křivočarý hmotného bodu**

- trajektorií je obecná křivka
- **směr** rychlosti i zrychlení se mění v závislosti na čase.
- **velikost** rychlosti i zrychlení se mění v závislosti na čase.

Nejjednodušším příkladem křivočarého pohybu je pohyb **kruhový**.

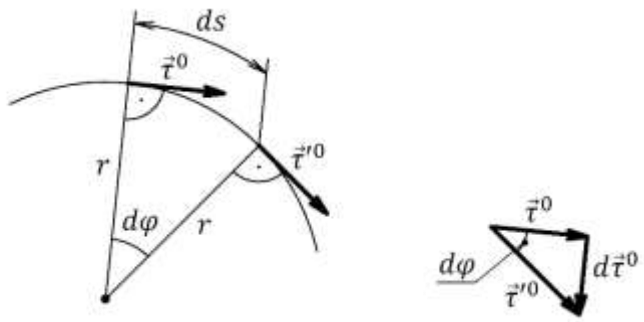
## Kruhový pohyb

Hmotný bod pohybující se po kruhové nebo téměř kruhové dráze se jako kinematický problém vyskytuje poměrně často. Můžeme se s ním setkat například při popisu pohybu družice kolem Země nebo i pohybu Země kolem Slunce. Z fyzikálního hlediska přináší zajímavé poznatky o kinematických veličinách.

Předpokládejme, že hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru *r* a **velikostí** rychlosti *v*. Jak se bude měnit velikost a směr zrychlení tohoto pohybu?

### Rozklad vektoru zrychlení na tečnou a normálovou složku

Zrychlení , jak plyne z (3.9) je definováno jako časová derivace **vektoru** rychlosti. Vektor rychlosti mění svůj **směr** podél kruhové dráhy a této změně směru odpovídá určité zrychlení.




*Obr. 3.4*

Vektor rychlosti má vždy směr tečny k trajektorii, proto lze vektor rychlosti zapsat jako

$$\vec{v} = v\vec{\tau}^0 \quad . \tag{3.14}$$

Derivací vektoru rychlosti (podle pravidla o derivování součinu kapitola 2) získáme tvar vektoru zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0 + v\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} \quad . \tag{3.15}$$

– První člen $\frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0$ má směr $\vec{\tau}^0$, tedy tečny k trajektorii, nazývá se **tečné zrychlení**, značí se $\vec{a}_t$.

Jeho velikost je rovna
$$|\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} \quad . \tag{3.16}$$

Pokud je velikost tečného zrychlení **nenulová ale konstantní,** jedná se o **kruhový pohyb rovnoměrně zrychlený**, pokud je tečné zrychlení **nulové,** jedná se **o kruhový pohyb rovnoměrný.**

Jaký směr bude mít druhý člen $v\frac{d\vec{\tau}^0}{dt}$ ?

Protože podle (2.1) a podle (2.2) je skalární součin dvou rovnoběžných jednotkových vektorů roven 1 a kolmých vektorů roven 0 , platí:

$$\vec{\tau}^0 \cdot \vec{\tau}^0 = 1 \tag{3.17}$$

Pokud vztah (3.17) zderivujeme (využijeme vzorec pro derivování součinu a na pravé straně je derivace konstanty rovna 0

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}^0 \cdot \vec{\tau}^0\right) = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}\vec{\tau}^0 + \vec{\tau}^0\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \quad 2\vec{\tau}^0\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \; \vec{\tau}^0 \perp \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} \tag{3.18}$$

Druhý člen $v\dfrac{d\vec{\tau}^0}{dt}$ má směr kolmý na $\vec{\tau}^0$, tedy kolmý (**normálový**) k trajektorii a nazývá se **normálové zrychlení**, značí se $\vec{a}_n$ , a při **křivočarém pohybu je vždy nenulové. Pokud by normálové zrychlení bylo nulové, jednalo by se o přímočarý pohyb.**

Ještě nám zbývá určit, jaká bude velikost normálového zrychlení. (obr. 3.4). Diskutujme velikost vektoru $\dfrac{d\vec{\tau}^0}{dt}$. Za čas *dt* urazí hmotný bod po kružnici oblouk o délce *ds*, kterému odpovídá středový úhel $d\varphi$ a platí $ds = r d\varphi$ . Potom (podle obr. 3.4)

$d\varphi = \dfrac{ds}{r} = \dfrac{\left|d\vec{\tau}^0\right|}{\left|\vec{\tau}^0\right|}$ . Ovšem velikost $\left|\vec{\tau}^0\right| = 1$ a po další úpravě dostáváme:

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{\left|d\vec{\tau}^0\right|}{dt}$$

$$\frac{1}{r}v = \frac{\left|d\vec{\tau}^0\right|}{dt} \quad .$$

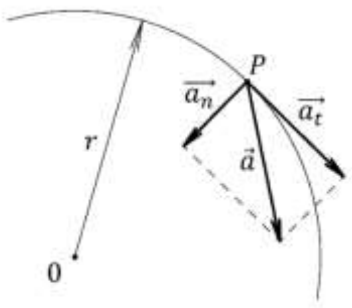
Pro velikost normálového zrychlení tedy platí:

$$\boxed{\left|\vec{a}_n\right| = v\left|\frac{d\vec{\tau}^0}{dt}\right| = v\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r} \quad .} \tag{3.19}$$

Pokud tedy předchozí úvahy shrneme, pro celkové zrychlení křivočarého pohybu platí:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad .} \tag{3.20}$$

$$a_t = |\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r}; \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{3.21}$$




*Obr. 3.5*

Často je účelné popisovat kruhový pohyb kromě vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}$ ještě **úhlovou rychlostí** $\vec{\omega}$, jejíž velikost je definovaná

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\ , \tag{3.22}$$

kde $d\varphi$ udává úhlovou změnu polohy průvodiče hmotného bodu za čas *dt*.

Jednotkou úhlové rychlosti je [ $\omega$ ] = $s^{-1}$. Za úhel $\varphi$ můžeme do vztahu (3.22) dosadit pomocí délky *s* oblouku a poloměru *R* kruhové dráhy.

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}\ . \tag{3.23}$$

Vedle okamžitého zrychlení můžeme pomocí **úhlové rychlosti** definovat úhlové zrychlení, jehož velikost je

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{3.24}$$

Jednotkou úhlového zrychlení je [ $\varepsilon$ ] = $s^{-2}$.

Veličinám úhlová rychlost a úhlové zrychlení musíme stejně jako rychlosti *v* a zrychlení *a* přiřadit směr. Jsou to vektorové veličiny. Vzájemný vztah mezi $\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{r}$ je dán vektorovým součinem :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ .} \tag{3.25}$$

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ je kolmý na rovinu vektorů $\vec{r}, \vec{v}$, což vyplývá z vlastností vektorového součinu a zároveň činitele v součinu nelze zaměnit, výsledek vektorového součinu záleží na pořadí činitelů (kapitola 2)

Pro rovnoměrný kruhový pohyb definujeme obvykle ještě veličiny:

- **perioda** (čas jednoho oběhu kruhové trajektorie) $\boldsymbol{T}$ $[T]=\mathrm{s}$
- **frekvence** (počet oběhů za sekundu) $\boldsymbol{f}$ $[f]=s^{-1}=\mathrm{Hz}$ (hertz)

Pro tyto veličiny platí : $f=\dfrac{1}{T}$ a $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f$

(3.26)

Pokud zobecníme rovnice odvozené pro kruhový pohyb na **obecný křivočarý pohyb**, můžeme ho pak rozdělit na:

- pohyb křivočarý **rovnoměrný**

$$\vec{a}=\vec{a}_n\,,\quad \vec{a}_t=\vec{0}$$
$$a=|\vec{a}_n|=\frac{v^2}{\rho} \tag{3.27}$$
$$v=|\vec{v}|=v_0=\text{konst.}\;,\vec{v}\neq\text{konst.}$$

kde $\rho$ je poloměr křivosti křivky znázorňující trajektorii pohybu v daném čase. Pro přímku je poloměr křivky definován jako $\rho\to\infty$ a tedy $a_n$ = 0 m.s$^{-2}$. **U přímočarých pohybů se proto může měnit jen velikost rychlosti, ne její směr.**

- pohyb křivočarý **rovnoměrně zrychlený**

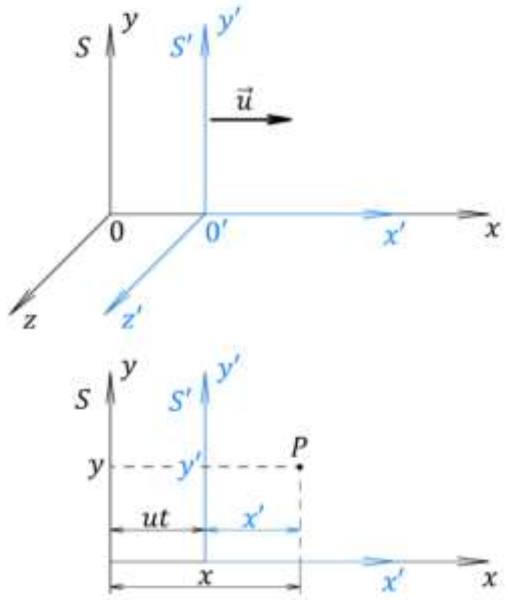
$$a=|\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}_n|^2+|\vec{a}_t|^2}=\text{konst.},\ \vec{a}\neq\text{konst.}$$
$$v=|\vec{v}|\neq\text{konst.}\;,\vec{v}\neq\text{konst.} \tag{3.28}$$

- pohyb křivočarý **nerovnoměrně zrychlený** $a=a(t)$

### 3.1.3 Relativnost pohybu a Galileovo pojetí pohybu. Inerciální vztažná soustava

Jak jsme ukázali, pohyb hmotného bodu je vždy vztažen k určité vztažné soustavě. Jestliže se hmotný bod současně pohybuje vůči dvěma objektům s různou velikostí a směrem rychlosti (např. družice vzhledem k Zemi a Slunci), můžeme se ptát, zda je jeden referenční systém lepší či správnější a který to je. A také**, známe-li popis nějakého děje v jedné soustavě, jak tento děj popíšeme v jiné soustavě?**

Předpokládejme pro jednoduchost souřadnicový systém označený jako S (0, x, y, z) pevně spojený se Zemí a druhý S´ (0, x´, y´, z´) pevně spojený s hmotným bodem, který se pohybuje konstantní rychlostí $\vec{u}=(u,0,0)$ v kladném směru osy *x* (obr.3.6) vzhledem k původnímu systému.




*Obr. 3.6 (podle [5])*

Jestliže v okamžiku $t = 0$ byly počátky obou soustav totožné, pak v kterémkoliv dalším okamžiku platí pro polohu hmotného bodu P určenou v systému S polohovým vektorem $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t \tag{3.29}$$

a pro jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} x &= x' + |\vec{u}|t \\ y &= y' \\ z &= z' \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Derivací vztahu (3.30) můžeme dospět také ke vztahu mezi rychlostmi hmotného bodu v systému S a $S'$.
Podle obr. 3.6

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{u} \\ v_x &= v_x' + u \\ v_y &= v_y' \\ v_z &= v_z' \quad . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Další derivací vztahu (3.31) můžeme dospět také ke vztahu mezi zrychlením hmotného bodu v systému S a $S'$. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' \\ a_x &= a'_x \\ a_y &= a'_y \\ a_z &= a'_z \quad . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Je důležité si uvědomit, že vztah pro zrychlení platí za předpokladu, že $t = t'$. Tento předpoklad je jedním ze základních axiomů Newtonovy klasické mechaniky. Transformační vztahy (3.30), (3.31) a (3.32) jsou známé jako **Galileova transformace** souřadnic a **Galileův vztah pro skládání rychlostí.**

**Inerciální vztažná soustava**

Podle Galileova kinematického principu relativity platí, že pokud měření času není ovlivňováno pohybem (tj. čas je absolutní), pak **zrychlení hmotného bodu** vzhledem ke všem vztažným systémům pohybujícím se vzhledem k sobě rovnoměrně přímočaře je co do **velikosti i směru stejné**. Takové soustavy nazýváme **inerciální (setrvačné)** a tyto soustavy mají zásadní význam v Newtonově klasické mechanice.

Odpovězme tedy na otázku z úvodu, který inerciální systém je nejlepší a základní pro popis všech pohybů? Který vybrat pro popis fyzikálních dějů – například pro popis pohybu auta, kmitů pružiny, pohybu Země kolem Slunce? Samozřejmě, často volíme systém, který je pro popis nejpohodlnější z praktického hlediska. A je taková soustava jen jedna nebo je jich víc? Takových soustav je nekonečně mnoho. **Platí totiž, že každá soustava, která se pohybuje vůči inerciální soustavě rovnoměrně přímočaře, je také inerciální. Složením dvou rovnoměrných přímočarých pohybů vzniká zase pohyb rovnoměrný přímočarý.**

- Zobecnění výsledků experimentů je známo pod názvem **klasický princip relativity.** Mechanickými experimenty od sebe nelze odlišit různé **inerciální** soustavy.
- Mechanické experimenty probíhající za přesně stejných podmínek dají ve všech **inerciálních** soustavách stejné výsledky.
- Obecně: Z hlediska mechanických experimentů jsou všechny **inerciální** systémy rovnoprávné.

**Všechny tyto formulace jsou různá vyjádření definující inerciální soustavu.**

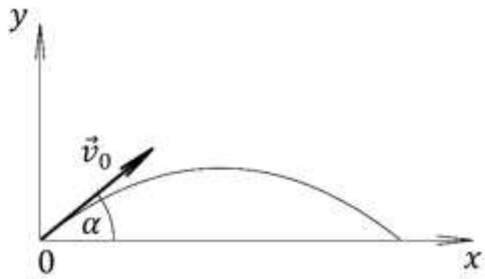
*Pozn.* Kromě těchto transformací, které jsou pevně spjaty s klasickou mechanikou, existuje ještě **Lorentzova transformace** souřadnic a z nich vyplývající zcela jiný vztah pro skládání rychlostí. Lorentzova transformace a z ní vyplývající důsledky se uplatňují, jestliže se jeden systém vzhledem k druhému pohybuje rychlostí blížící se k rychlosti světla ve vakuu ($3.10^8$ m.s$^{-1}$).

**Příklad :**

**1) Šikmý vrh**

Mějme objekt, například projektil, jenž je vystřelen do prostoru šikmo vzhůru v rovině *xy* počáteční rychlostí $\vec{v}_0$ , která svírá s osou *x* úhel $\alpha$ (obr. 3.7).

Řešení:




Obr. 3.7

Rychlost v tomto případě rozložíme do směru osy *x* a *y* a namísto jedné rovnice řešíme rovnice dvě. Okamžitá rychlost ve směru osy *x* bude rychlost rovnoměrného pohybu a rychlost ve směru osy *y* bude rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením (-)*g*: Z obr. 3.7 vyplývá:

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = \int a_x \, dt = C_1 \quad \rightarrow v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha = C_1$$

$$a_y = -g \quad \Rightarrow \quad v_y = \int a_y \, dt = -gt + C_2 \quad \rightarrow v_y(t=0) = v_0 \sin\alpha = C_2$$

$$x = \int v_x \, dt = v_0 t \cos\alpha + C_3 \quad \rightarrow \; x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

$$y = \int v_y \, dt = v_0 t \sin\alpha \; - \frac{1}{2} g\, t^2 + C_4 \quad \rightarrow \; y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C_4 = 0$$

Z těchto vztahů lze odvodit vztahy pro vlastnosti pohybu. Například:

– maximální délka vrhu (dolet) a čas dopadu tělesa na zem < = > *y*-ová souřadnice je rovna 0

$$v_0 t_{dopadu} \sin\alpha = \frac{1}{2} g t_{dopadu}{}^2$$

$$t_{dopadu} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_{dopadu} = v_0 t_{dopadu} \cos\alpha = \frac{v_0^2 \, 2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

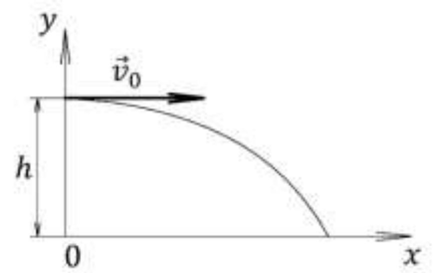
– rychlost při dopadu tělesa na zem

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 \sin\alpha - gt_{dopadu}\right)^2}$$

Kinematicky šikmý vrh tedy představuje superpozici (složení) dvou jednoduchých pohybů: pohybu rovnoměrného přímočarého ve směru osy $x$ a rovnoměrně zrychleného (zpomaleného) přímočarého ve směru osy $y$. Jeho trajektorií je ve vakuu část paraboly. **Tento závěr o superpozici pohybů je možné zobecnit pro jakýkoliv složitější pohyb, protože vyplývá z vektorové povahy kinematických veličin.**

**2) Vodorovný vrh**

**Vodorovným vrhem rozumíme pohyb tělesa, které je opět** vrženo do prostoru v rovině $xy$ ve výšce $h$ s počáteční rychlostí $\vec{v}_0$, která je rovnoběžná s osou $x$, a tedy úhel $\alpha = 0$ (obr. 3.8).




*Obr. 3.8*

Řešení: $a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = \int a_x \, dt = C_1 = v_0 = v_x(t=0)$

$$a_y = -g \quad \Rightarrow \quad v_y = \int a_y \, dt = -gt + C_2 \quad \rightarrow v_y(t=0) = 0 = C_2$$

$$x = \int v_x \, dt = v_x t + C_3 \quad \rightarrow \; x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

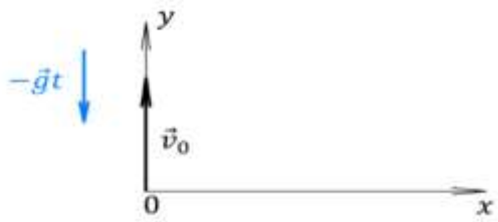
$$y = \int v_y \, dt = -\frac{1}{2} g\, t^2 + C_4 \quad \rightarrow \; y(t=0) = h \quad \Rightarrow C_4 = h$$

$$y = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Rovnice (3.11) až (3.13) jsou použitelné i pro případy, kdy se jedná o obecný křivočarý pohyb v prostoru. V tomto případě řešíme vždy tři rovnice (pro jednotlivé složky vektorů) pro rychlost a dráhu.

**3) Svislý vrh**

**Svislým vrhem rozumíme pohyb tělesa, které je opět** vrženo do prostoru v rovině $xy$ s počáteční rychlostí $\vec{v}_0$, která je kolmá na osu $x$, a tedy úhel $\alpha = 90^\circ$.




Obr. 3.9

Řešení:

$$a_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_x = \int a_x \, dt = C_1 = 0 = v_x(t=0)$$

$$a_y = -g \qquad \Rightarrow \qquad v_y = \int a_y \, dt = -gt + C_2 \quad \rightarrow v_y(t=0) = v_0 = C_2$$

$$x = 0 = x(t=0)$$

$$y = \int v_y \, dt = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + C_3 \qquad \rightarrow \; y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

**Další příklady k procvičení:**

4) Určete obecně rovnice pro trajektorii, velikost rychlosti $v$ a velikost zrychlení hmotného bodu, jehož kartézské souřadnice jsou jako funkce času $t$ vyjádřeny rovnicemi: $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin\omega t$, $z = Bt$.

Řešení:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= A\sin\omega t \\ z &= Bt \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= A^2 \\ \\ z &= Bt \end{aligned}\right\} \text{trajektorií je šroubovice}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = A\omega\cos\omega t \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = |\vec{v}| = \sqrt{(A\omega\sin\omega t)^2 + (A\omega\cos\omega t)^2 + B^2} = \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(A\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(A\omega^2\sin\omega t\right)^2} = A\omega^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a$$

5) Z rozhledny o výšce 30 m byl vržen kámen ve vodorovném směru rychlostí 10 m.s$^{-1}$ . Určete velikost rychlosti při dopadu na zem a vodorovnou vzdálenost místa dopadu od paty rozhledny. Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení:

Aplikujeme vztahy z příkladu 2:

dopad: $y = 0 \;\rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow t_{dopad} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}45\ \text{s}$

$x_{dopad} = v_0 t_{dopad} = 24{,}5\ \text{m}$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \\ v_y &= -gt \end{aligned}\right\} v = \sqrt{v_0^2 + (-gt_{dopad})^2} = \sqrt{10^2 + 24{,}5^2} = 26{,}5\ \text{m.s}^{-1}$$

6) Kolo se otáčí s frekvencí 25 Hz. Brzděním lze dosáhnout, že jeho otáčení bude rovnoměrně zpomalené a kolo se zastaví po čase 30 s od začátku brzdění. Vypočítejte úhlové zrychlení kola.

Řešení:

Aplikujeme vztah (3.25):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + C \qquad C = \omega(t=0) = \omega_0 = 2\pi f$$

zastaví se v čase $t$, kdy $\omega = 0$

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + 2\pi f = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{2\pi f}{t} = -\frac{2\pi.25}{30} = -5{,}24 \text{ s}^{-2}$$

## 3.2 Dynamika hmotného bodu

### 3.2.1 Newtonovy pohybové zákony

Kinematika hmotného bodu zkoumá pohyb hmotného bodu pomocí kinematických veličin dráha, rychlost, zrychlení. Základním pojmem Newtonovy dynamiky je **síla, která popisuje působení jednoho tělesa na druhé**. Se silami a jejich působením se setkáváme v každodenním životě. Síly vyvolávají tah, tlak, pohyb.

Pokud bychom měli těleso o hmotnosti 1 kg a bylo mu v prostředí bez působení jiných sil (např. odporových) uděleno zrychlení 1 $m.s^{-2}$, potom na něj působila síla 1 newton. Jednotka newton je jednotkou síly a značí se N.

Newton formuloval tři základní zákony mechaniky :

**1. Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není nuceno tento stav změnit působením jiného tělesa (tedy silami).**

**2. Zrychlení pohybu tělesa (hmotného bodu) je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti.**

**3. Každé síle (akci) přísluší stejně velká síla opačného směru, která se nazývá reakce.**

### 3.2.2 První Newtonův pohybový zákon - zákon setrvačnosti

První Newtonův zákon, nazývaný často **zákon setrvačnosti**, definuje příčinu změny pohybového stavu hmotného bodu. Za zdroj silového působení je podle Newtona považováno jiné těleso.

Zákon setrvačnosti můžeme formulovat i takto:

**Nulová výslednice všech sil působících na těleso <=> nulové zrychlení**

**Nenulová výslednice všech sil působících na těleso <=> nenulové zrychlení**

Je tedy třeba si uvědomit, že pokud na těleso působí nenulová výsledná síla, vždy bude vykonávat pohyb zrychlený (zpomalený), pokud je výsledná síla rovna nule, těleso je buď v klidu nebo v rovnoměrném pohybu přímočarém (s konstantní rychlostí).

Zákon setrvačnosti platí v **inerciálních vztažných soustavách**. Soustava pevně spojená se Zemí není přesně inerciální soustava. Je to důsledek jak zemské rotace kolem vlastní osy, tak pohybu Země kolem Slunce. Většinu problémů pohybu těles na zemském povrchu však můžeme přesto řešit v souřadném systému pevně spojeném se Zemí jako v systému inerciálním a nedopustíme se podstatné chyby.

Schopnost těles bránit se změně pohybového stavu označujeme jako setrvačnost tělesa. **Jako míru setrvačnosti (abychom mohli tuto vlastnost těles kvantitativně srovnávat) Newton navrhl hmotnost tělesa**. Experimentálně bylo dokázáno, že míra setrvačnosti určitého tělesa je úměrná jeho tíze. Hmotnosti dvou látkově odlišných těles můžeme porovnávat vážením. Jednotkou hmotnosti je 1 kg.

### 3.2.3 Druhý Newtonův pohybový zákon - zákon síly

Druhý Newtonův zákon lze zapsat vektorovou rovnicí

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.33}$$

nebo rovnicemi pro jednotlivé složky síly a zrychlení. **Síla** je **vektorová veličina**, záleží na její velikosti i směru. Jednotkou síly je [ $F$ ] = kg.m.s$^{-2}$. Jednotkou síly je 1 N (newton).

Hmotnost je mírou setrvačnosti hmotného bodu a v rámci klasické mechaniky pro $v \ll c$, kde $c$ je rychlost světla ve vakuu, nezávisí na rychlosti pohybu hmotného bodu.

Zavedeme-li další veličinu charakterizující pohybový stav tělesa – **hybnost -** vztahem

$$\vec{p} = m\vec{v}\,, \tag{3.34}$$

potom lze druhý Newtonův zákon přepsat do tvaru

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}\quad .} \tag{3.35}$$

Pokud je hmotnost v průběhu popisovaného pohybu konstantní, aplikujeme druhý Newtonův zákon ve tvaru (3.33), pokud hmotnost není konstantní (například pohyb rakety), použijeme tvar (3.35).

Druhý pohybový zákon tak můžeme vyjádřit pomocí hybnosti:

**Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna síle, která na něj působí.**

Pro popis časových účinků síly charakterizuje veličina nazvaná **impuls síly**

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt\,, \tag{3.36}$$

kde při integraci předpokládáme působení síly v intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$.

Často je tato síla $\vec{F} = \vec{F}(t)$ v čase proměnná. Dosadíme-li do vztahu (3.37) za sílu $\vec{F}$ ze vztahu (3.36), dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \quad . \qquad (3.37)$$

**Časové působení síly se tedy projeví změnou hybnosti hmotného bodu.**

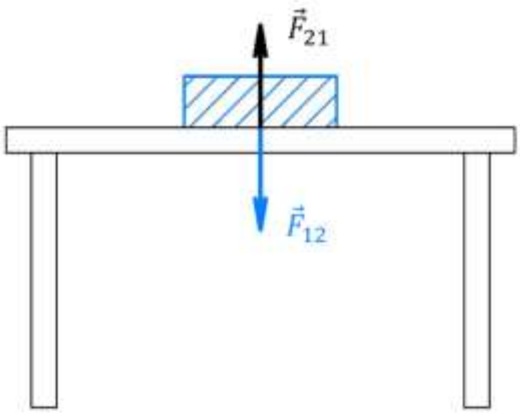
To ale není nic překvapivého, protože:

změna hybnosti hmotného bodu => (za přepokladu konstantní hmotnosti) změna jeho rychlosti => nenulové zrychlení => působí nenulová síla

### 3.2.4 Třetí Newtonův pohybový zákon - princip akce a reakce

Třetí Newtonův zákon řeší problém interakce mezi tělesy a popisuje skutečnost, že síly se vyskytují v párech, neexistuje izolovaná síla. Říká, že: působí-li těleso 1 na těleso 2 silou $\vec{F}_{12}$, pak těleso 2 působí na těleso 1 silou $\vec{F}_{21}$ a platí

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad .} \qquad (3.38)$$





*Obr. 3.10*

**Pohybové účinky sil akce a reakce**, přestože jsou obě síly stejně velké, mohou být naprosto odlišné. Je třeba si uvědomit, že síly působí na různé objekty o různé hmotnosti a proto objektům udělují různá zrychlení. Například Země působí na míč stejně velkou silou jako míč na Zemi, přesto zrychlení míče a Země touto silou způsobená jsou naprosto odlišná.

### 3.2.5 Aplikace Newtonových zákonů

Newtonův druhý zákon umožňuje ze známé síly a daných počátečních podmínek stanovit rychlost hmotného bodu a trajektorii v kterémkoliv okamžiku. Pohyb hmotného bodu je tak jednoznačně určen. Říkáme, že newtonovská klasická mechanika je deterministická. Má však jistá omezení platnosti, která se týkají především mikroobjektů. Problematiku této oblasti řeší kvantová mechanika, jejíž popis mikroobjektů je založen na pravděpodobnosti. Další omezení klasické mechaniky představují problémy spojené s pohybem těles rychlostí blížící se k rychlosti světla ve vakuu. Pro takové případy je třeba použít Einsteinovy teorie relativity a z ní vyplývajících závěrů relativistické mechaniky.

Newtonovy zákony lze aplikovat dvojím způsobem:

- Na základě znalosti všech působících sil na hmotný bod lze stanovit rychlost a posléze dráhu hmotného bodu v závislosti na čase. Známe-li sílu působící na hmotný bod, můžeme sestavit rovnici ve tvaru druhého Newtonova zákona, vztah (3.33)

$$m\vec{a} = \vec{F} \ .$$

Tato rovnice s konkrétně vyjádřenou silou představuje **pohybovou rovnici**, která určuje pohyb hmotného bodu. Jestliže vyjádříme $\vec{a}$ pomocí časové změny rychlosti a tu pomocí změny polohového vektoru, dostáváme jednu diferenciální rovnici druhého řádu pro $\vec{r}(t)$

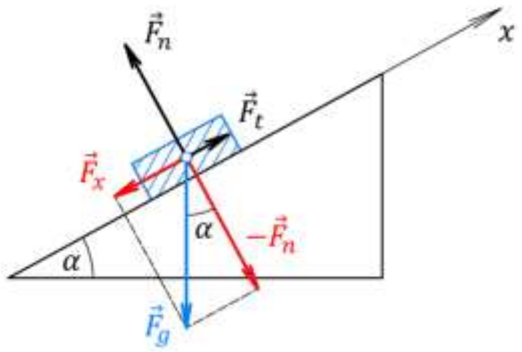
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{3.39}$$

nebo tři rovnice pro složky *x, y, z*. Při provádění integrace potřebné ke stanovení $\vec{r}(t)$ je třeba určit dvě integrační konstanty pomocí počátečních podmínek, tj. počáteční rychlosti a dráhy . Po vyřešení rovnice (3.39) je možné určit polohu hmotného bodu v kterémkoliv okamžiku.

- Ze známé hmotnosti a polohy jako funkce $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hmotného bodu lze určit vnější sílu, která způsobuje pohyb hmotného bodu.

**Příklad:**

**Nakloněná rovina**




*Obr. 3.11*

Těleso o hmotnosti *m* se nachází na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou osou úhel *α*. Dynamický součinitel tření mezi nakloněnou rovinou a tělesem je $f$.

Vždy je třeba nejprve stanovit **všechny síly působící na těleso**. V tomto případě je to tíhová síla $\vec{F}_g$, normálová síla $\vec{F}_n$ (reakce podložky) a třecí síla $\vec{F}_t$.

Tíhovou sílu lze rozložit podle obr. 3.11 do složek ve směru nakloněné roviny a směru kolmého, jejich velikost je:

$$F_x = mg\sin\alpha$$
$$F_n = mg\cos\alpha$$

Pro třecí sílu platí, že má směr proti pohybu a pro její velikost platí:

$$F_t = fF_n = fmg\cos\alpha$$

Nyní použijeme 2. Newtonův pohybový zákon pro pohyb ve směru osy *x* a *y*. Předpokládáme, že pohyb se děje ve směru (záporném) osy *x*.

$$-ma_x = -mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha = -mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$
$$ma_y = -mg\cos\alpha + F_n = 0$$

Dostáváme tedy řešení pro zrychlení pohybu ve směru osy *x*. Z něj lze integrací získat i další vztahy pro rychlost a souřadnici.

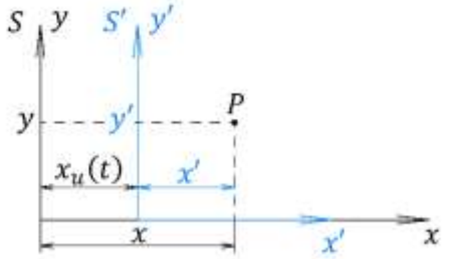
$$a_x = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$

*Pozn. Dynamický součinitel tření (součinitel smykového tření) je činitel úměrnosti mezi normálovou a třecí silou působící se na pohybující se těleso. Existuje ještě statický součinitel tření, který je činitel úměrnosti mezi normálovou silou a maximální silou, při které ještě těleso zůstává v klidu. Dynamický součinitel tření je vždy menší než statický součinitel tření*

### 3.2.6 Pohyb v neinerciální soustavě

V kapitole 3.2.2 jsme upozornili, že souřadná soustava pevně spojená se Zemí není přesně inerciální soustava. Inerciální soustavy jsme zavedli jako soustavy, které se vůči sobě pohybují rovnoměrně přímočaře. Také jsme dospěli k tomu, že v nich platí Newtonovy zákony. Jak to ale bude s platností Newtonových zákonů v soustavách, které nejsou inerciální? Mějme nějaké těleso v neinerciální soustavě (např. míč na podlaze rozjíždějícího se vlaku). Vlak se při rozjíždění pohybuje zrychleně. Míč ale nezůstane na místě a pohybuje se s nenulovým zrychlením opačným směrem, než je zrychlení vlaku. Míč se sice pohybuje zrychleně, ale přesto toto zrychlení nezpůsobuje žádná síla. To odporuje 1. Newtonovu zákonu. **V neinerciálních vztažných soustavách neplatí 1. Newtonův zákon** (a opačně – **v inerciálních vztažných soustavách platí 1. Newtonův zákon**) – takto definujeme obě soustavy.

Odvoďme vztah pro zrychlení, se kterým se těleso v neinerciální soustavě pohybuje. Budeme uvažovat případ dvou vztažných soustav $S$ a $S'$. Čárkovaná neinerciální soustava se vůči nečárkované inerciální soustavě pohybuje zrychleně ve směru osy $x$ rychlostí $\vec{u}(t) = (u(t), 0, 0)$ a nerotuje vůči ní. Osy obou soustav jsou orientovány podle obr. 3.12. Osy $x$ a $x'$ jsou rovnoběžné (resp. splývají). Budeme sledovat hmotný bod $P$, které se pohybuje se zrychlením $a_x$, rychlostí $v_x$ a je popsán souřadnicí $x$ vzhledem k vztažné soustavě $S$. Všechny tyto parametry jsou funkcí času.




*Obr. 3.12 (podle [5])*

Pro popis hmotného bodu $P$ ve vztažné soustavě $S'$ platí

$$x' = x - x(t) \qquad v'_x = v_x - u(t) \qquad a'_x = a_x - a_u(t) \tag{3.40}$$

Vidíme, že na hmotný bod $P$ působí v čárkované soustavě dodatečné zrychlení o velikosti $a_u = \dfrac{du}{dt}$.

Soustava $S'$ se vůči $S$ pohybuje se zrychlením $\vec{a}_u = \dfrac{d\vec{u}}{dt}$. Hmotný bod $P$ se podle vztahu (3.40) pohybuje v této soustavě s dodatečným zrychlením $-\vec{a}_u$, tedy se stejně velkým zrychlením ale opačným směrem, než je směr zrychlení pohybu čárkované soustavy $\vec{a}_u$. V neinerciální soustavě tak vzniká dodatečné zrychlení, které v inerciální soustavě nepozorujeme. To porušuje 1. Newtonův zákon. Použití 2. Newtonova zákona můžeme ale za určitých podmínek zachovat, a to pokud definujeme novou sílu, tzv. setrvačnou sílu, která na hmotný bod $P$ v neinerciální soustavě působí. Vynásobíme-li vztah pro zrychlení v (3.40) hmotností hmotného bodu $P$, dostaneme

$$ma'_x = ma_x - ma_u \rightarrow F' = F - F_s \rightarrow \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_s \rightarrow \vec{F}_s = -m\vec{a}_u. \tag{3.41}$$

**Setrvačná síla je definována jako** $\vec{F}_s = -m\vec{a}_u$. Pokud ji vezmeme v úvahu jako další sílu působící na těleso v neinerciální soustavě, bude potom i zde platit 2. Newtonův zákon. Setrvačná síla ale není síla, kterou by na těleso působily nějaká jiná tělesa (definice síly je zavedena pomocí působení jednoho tělesa na druhé). **Setrvačná síla není pravá síla**, je to tzv. zdánlivá (fiktivní) síla. Jelikož setrvačná síla není pravou silou, tak k ní **neexistuje reakce** (neexistuje těleso, na které lze působit zpět).

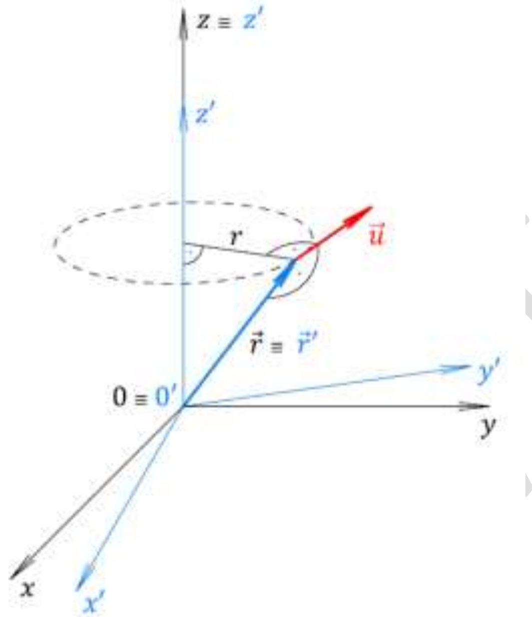
Protože se neinerciální vztažná soustava pohybuje zrychleně, působí na ni podle 1. Newtonova pohybového zákona vnější síla. Na inerciální soustavu naopak žádná vnější síla nepůsobí. Inerciální soustava je ale z důvodu působení ostatních okolních těles gravitačními silami idealizace, ale vztažnou soustavu pevně spojenou se Zemí obvykle považujeme za soustavu inerciální, protože při běžných dějích nejsou projevy její neinerciálnosti příliš významné.

**Příklad:**

V praxi to všichni známe. Když stojíme v autobuse nebo v metru a nedržíme se, “cukne“ to s námi při rozjezdu dozadu. Podobně je tomu při rozjezdu auta a “něco“ nás tlačí dozadu do sedačky. A to je právě setrvačná síla. Setrvačná síla má opačný směr než zrychlení vozidla. Když budete stát v metru třeba na skateboardu, ostatní cestující při rozjezdu metra uvidí, že se vlivem setrvačné síly rozjedete dozadu vůči vagónu metra.

Jinak to ale uvidí lidé pozorující vás z venku. Těm se zdá, že vy i skateboard zůstanete v klidu, zatímco vagón metra zrychluje vpřed. Jeho podlaha tedy pod vámi “podjíždí“. Uvnitř zrychlujícího auta sice nikam neujíždíte, a pozorovatel stojící venku vidí, že zrychlujete zároveň s autem. Ale abyste zrychlovali, musí na vás působit nějaká síla. Je to síla, kterou vás tlačí zezadu opěradlo. Podle principu akce a reakce naopak vy tlačíte dozadu na opěradlo, takže se do něj trochu zabořite. **Vidíme, že k popisu situace z hlediska inerciální soustavy nepotřebujeme žádnou setrvačnou sílu. Ona tam totiž žádná není, což ale v inerciální soustavě předpokládáme.** Podobně to bude ve vozidle, které brzdí.

Uvažujme jiný pohyb hmotného bodu v takové neinerciální soustavě, která se vůči jiné inerciální soustavě otáčí kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ . Inerciální soustavu budeme označovat jako nečárkovanou, rotující jako čárkovanou. Počátky obou soustav 0 ,0´ jsou shodné. Shodné jsou i osy z = z´ obou soustav a osa z je zároveň osou otáčení čárkované soustavy.




*Obr. 3.13*

Okamžitou polohu hmotného bodu (obr. 3.13) popíšeme v souřadnicových soustavách pomocí polohových vektorů, které jsou, jak vyplývá z obrázku, shodné

$$\vec{r} = \vec{r}' . \tag{3.42}$$

Jestliže se hmotný bod pohybuje, pak mezi jeho rychlostí v nečárkované a v čárkované souřadnicové soustavě platí vztah

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \ , \tag{3.43}$$

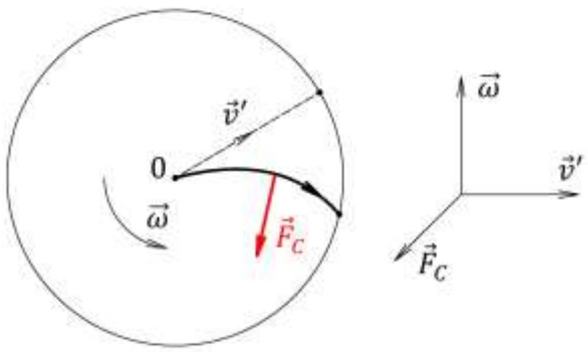
kde $\vec{u}$ je unášivá rychlost a můžeme vyjádřit vztahem:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \ . \tag{3.44}$$

Vypočteme-li pomocí (3.43) zrychlení v otáčivé soustavě, zjistíme, že je jiné než zrychlení v nečárkované inerciální soustavě, a pro sílu platí:

$$\begin{aligned}
\vec{F}' &= m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_E + \vec{F}_C + \vec{F}_o \\
\vec{F}_E &= -m\left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right) \\
\vec{F}_C &= -2m\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right) \\
\vec{F}_o &= -m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)
\end{aligned} \qquad (3.45)$$

V čárkované soustavě se objevily další tři síly, které nazýváme **zdánlivé síly.** První síla se rovná nule, jestliže $\vec{\omega} = konst.$ , druhá síla se nazývá **Coriolisova síla** (obr. 3.14) . Musíme ji uvažovat v případech, kdy rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ má jiný směr než úhlová rychlost otáčení $\vec{\omega}$ ( $\vec{F}_C \approx -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ ). Třetí zdánlivá síla je silou odstředivou. Důsledky existence těchto tří sil, zejména druhé a třetí ovlivňují různé děje na povrchu Země. Pomocí Coriolisovy síly lze například vysvětlit, proč cyklony na severní polokouli se točí proti směru hodinových ručiček a na jižní polokouli opačně, proč je jeden břeh řeky více podemletý než druhý, proč se mění rovina kyvu kyvadla (Foucaltovo kyvadlo) atd.




*Obr. 3.14*

### 3.2.7 Pohyb v poli gravitační síly

V mechanice jsme se setkali se silami, jimiž na sebe působí tělesa při bezprostředním dotyku. Gravitačními nebo elektrickými a magnetickými silami však na sebe působí i tělesa, která se bezprostředně nedotýkají a jsou od sebe třeba i velmi vzdálena. První představy o povaze těchto sil vycházely z hypotézy, že zdrojem sil jsou samotná tělesa, popř. částice a ty vyvozují účinky bezprostředně na dálku, tj. nepřisuzovala se žádná úloha prostoru, který tělesa obklopuje.

Na začátku 19. století vyslovil Faraday představu, že zprostředkovatelem tohoto působení je prostor mezi částicemi (tělesy). Předpokládal, že materiální objekty vytvářejí ve svém okolí zvláštní stav, který nazval polem. **Pole** je součástí materiálních objektů, je jimi vytvořeno, rozkládá se spojitě kolem nich a zprostředkuje vzájemné působení - interakci mezi hmotnými objekty. Faradayova teorie vedla k představě, že příroda je tvořena jedinou hmotou, jejíž dvě dosud známé formy existence jsou **látka** a **pole**. Látka je tvořena částicemi (atomy, molekulami, elektrony atd.), pole je spojeno s každou jednotlivou částicí či tělesem, jímž je vytvořeno. Silové působení těles na dálku se děje prostřednictvím pole vytvořeného tímto tělesem. Každý hmotný objekt (částice nebo těleso) vytváří gravitační pole v prostoru jej obklopujícím a současně reaguje na gravitační pole vytvořené jinými částicemi či tělesy. **Pole** je nositel a zprostředkovatel vzájemného působení, není to ale nic reálného, hmatatelného. Z matematického hlediska je pole model, ve kterém funkcí každému bodu v prostoru jednoznačně přiřazuje vektor, skalár (číslo), případně tenzor. Příkladem skalárního pole je pole teplotní, hustotní, vektorového pole pak pole elektromagnetické a gravitační.

**Newtonův gravitační zákon**

Z relativně přesných pozorování pohybu planet, která provedl Tycho Brahe koncem 16. století v Praze (1546-1601), odvodil jeho asistent, matematik a astrolog Johannes Kepler (1571-1630), tři zákony. Byly to zákony empirické (odvozené z pozorování).

**Keplerovy zákony**:

1. *Planety obíhají kolem Slunce v elipsách, málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.*
2. *Plochy opsané průvodičem planety (spojnicí středu Slunce a středu planety) za stejnou dobu jsou si rovny).*

3. *Druhé mocniny oběžných dob dvou planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.*

Isaac Newton vyslovil hypotézu, že pohyb planet je způsoben gravitační silou – stejnou silou, která nás shodí na zem, když zakopneme. Newton odvodil vztah (3.46) právě z Keplerových zákonů. Ukázal, že pokud se planety pohybují po eliptických drahách, je gravitační síla mezi nimi a Sluncem nepřímo úměrně na druhé mocnině jejich vzdálenosti.

Newtonův gravitační zákon říká:

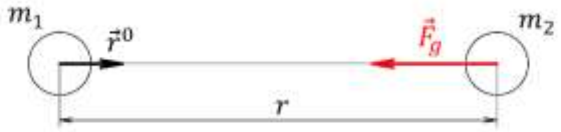
**Každé dva hmotné body se vzájemně přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdáleností a leží na jejich spojnici.**

Pro gravitační sílu $\vec{F}_g$, kterou působí hmotný bod o hmotnosti $m_1$ na hmotný bod o hmotnosti $m_2$ ve vzdálenosti $r$ tedy platí

$$\boxed{\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}^{\,0} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad ,} \qquad (3.46)$$

kde $\vec{r}^{\,0} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor polohového vektoru $\vec{r}$ ve směru od hmotného bodu hmotnosti $m_1$ k hmotnému bodu o hmotnosti $m_2$. Znaménko (-) vyjadřuje, že síla má opačný směr než jednotkový vektor (obr. 3.14) a je vždy přitažlivá.

Konstanta $\kappa$ (malé řecké písmeno kappa) se nazývá **gravitační konstanta** a její hodnota je $\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$.




*Obr. 3.14*

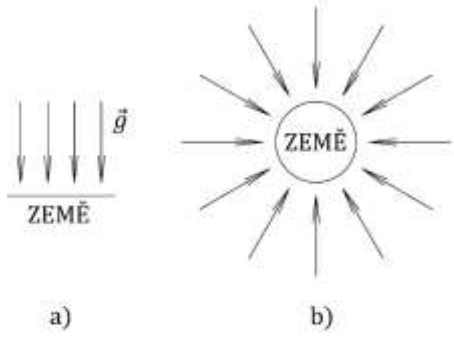
Vztah (3.46) můžeme použít nejen pro dva hmotné body nebo dvě tělesa, která můžeme za dva hmotné body považovat. Lze ho zapsat i pro dvě homogenní koule, jejichž středy jsou vzdáleny o $r$ (obr. 3.14).

Pole gravitační síly $\vec{F}_g$ charakterizujeme další veličinou, **intenzitou gravitačního pole** $\vec{K}$ **.** Intenzita gravitačního pole v daném bodě je vektor, jehož velikost je stanovena jako podíl gravitační síly, která v tomto bodě působí na hmotný bod a hmotnosti tohoto bodu $m$ :

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} \quad . \tag{3.47}$$

Jednotkou intenzity gravitačního pole je $[K]$ = N.kg$^{-1}$. Pro gravitační pole definujeme pojem **siločára. Siločára** je myšlená křivka, v jejímž každém bode má vektor intenzity směr její tečny. Příklady tvaru siločar jsou schématicky znázorněny na obr. 3.15.

Intenzitu gravitačního pole můžeme také definovat jako sílu, kterou působí pole v daném místě na těleso o hmotnosti 1 kg.

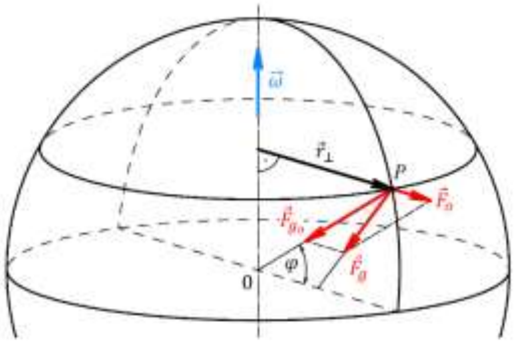



*Obr. 3.15*

Na povrchu Země představuje gravitační síla podstatnou část **tíhového pole Země** (obr. 3.16). V tíhové síle je však ještě obsažena odstředivá síla způsobená rotací Země a tedy pro tíhovou sílu $\vec{G}$ platí $\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_o = m\vec{g} + m\vec{a}_o$ Velikost odstředivého zrychlení $a_o$ je ale zhruba 300 -krát menší než velikost gravitačního zrychlení na rovníku (zde $a_o$ = 0,0034 m.s$^{-2}$), proto ho můžeme ve většině případů zanedbat. Potom můžeme srovnáním (3.48) se zákonem síly zjistit, že

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g} \quad . \tag{3.48}$$

Vektor intenzity gravitačního pole Země se tedy přibližně rovná vektoru tíhového zrychlení $\vec{g}$ . Obr. 3.15 a) ještě znázorňuje speciální případ v blízkosti povrchu Země, kdy tíhové zrychlení nemění velikost ani směr. **Toto pole nazýváme homogenní**.




*Obr. 3.16*



**Pohyb družice v okolí Země**

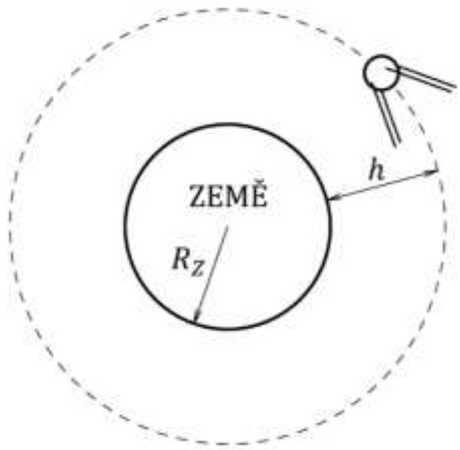
Předpokládejme, že ve výšce $h$ nad povrchem Země vystřelíme těleso ve vodorovném směru rychlostí $\vec{v}$ obr. 3.17. Těleso se bude pohybovat po určité trajektorii a dopadne na Zem. Při zvětšování velikosti počáteční rychlosti vodorovného vrhu tělesa se trajektorie tělesa prodlužuje, až při určité rychlosti vrhu již těleso nedopadne na Zem, ale pohybuje se kolem Země po kruhové dráze rychlostí stálé velikosti $v_k$ . V tomto případě musí gravitační síla působící na těleso (družici) být rovna síle dostředivé, která drží těleso na kruhové dráze, takže pro $r > R$, platí

$$m a_n = m \frac{v_k^2}{R_z + h} = \kappa \frac{m M_z}{\left(R_z + h\right)^2}, \tag{3.49}$$

kde $m$ je hmotnost družice, $R_z$ poloměr Země ( = 6378 km) a $M_z$ hmotnost Země. Pro kruhovou rychlost družice na dráze poloměru $R_z + h$ platí:

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{R_z + h}} \tag{3.50}$$

Tato rychlost má v blízkosti povrchu Země ( $h << R_z$ ) hodnotu 7,9 km.s$^{-1}$ a nazývá se **první kosmická rychlost.**



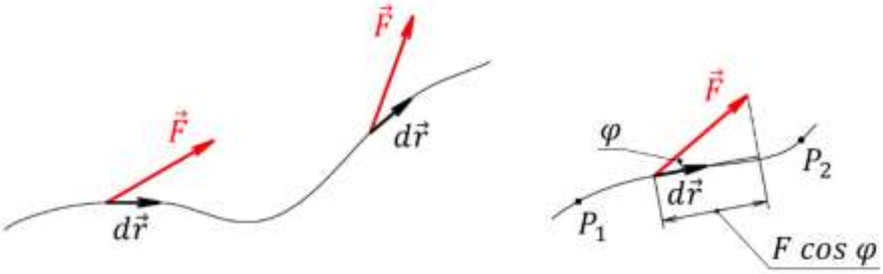

*Obr. 3.17*

Nejmenší rychlost $v_2$, kterou by muselo mít těleso na povrchu Země, aby se od Země vzdálilo do nekonečna (aby opustilo zemské gravitační pole), se nazývá **druhá kosmická rychlost** (nebo úniková, parabolická rychlost). Určíme ji ze zákona zachování mechanické energie tělesa a její hodnota je $11{,}2\ \mathrm{km.s^{-1}}$ Takové těleso by se sice dostalo z gravitačního působení Země, ale stane se oběžnicí v silovém poli Slunce. Aby těleso uniklo ze sluneční soustavy, musí opouštět povrch Země **třetí kosmickou rychlostí** ( $42{,}1\ \mathrm{km.s^{-1}}$ ). Trajektorií tělesa bude hyperbola.

### 3.2.8 Práce a energie

Mechanická **práce je** skalární veličina, která popisuje **dráhové účinky síly**. Působí-li na pohybující se hmotný bod síla $\vec{F}$ , je práce $dW$ vykonaná silou $\vec{F}$ po elementární dráze *dr* hmotného bodu rovna skalárnímu součinu vektoru síly a změny polohového vektoru $d\vec{r}$ , jejíž velikost je rovna elementární dráze *dr*.

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ .} \tag{3.51}$$




*Obr. 3.17*

Práce vykonaná podél dráhy hmotného bodu z bodu $P_1$ do bodu $P_2$, obr. 3.17, je rovna integrálu

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} F\, dr \cos \varphi \,. \tag{3.52}$$

Jednotkou práce je $[W] = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}} = 1\ \mathrm{J}$ (joule).

Hodnota integrálu (3.52) obecně **závisí na trajektorii pohybu**, tj. na cestě, po které se hmotný bod přemisťuje a na velikosti úhlu $\varphi$ .

**Práce se nekoná, jestliže vektor síly je kolmý na směr vektoru** $d\vec{r}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \;\; \rightarrow \; \cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$**.**

**Práci koná jen složka rovnoběžná se směrem pohybu.**

Příkladem je dostředivá síla, která má vždy směr kolmý k trajektorii, a proto práci nekoná.

Zvláštní typ síly je **síla konzervativní.** Pro práci vykonanou po uzavřené křivce $l$ (vyjádřeno integrací přes uzavřenou křivku, která se označuje $\oint_l f(x) dx$) konzervativními silami platí:

$$\boxed{\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{3.53}$$

To znamená, že práce konzervativních sil závisí pouze na počáteční a koncové poloze přemisťovaného bodu, a nikoliv na tvaru trajektorie.

Příkladem konzervativní síly je např. síla gravitační, elektrostatická. Naopak nekonzervativní síla je např. síla tření nebo magnetická.

Podle 2. Newtonova zákona, působí-li na hmotný bod síla, dochází ke změně pohybového stavu. Proto dalším krokem je najít souvislost mezi vykonanou prací, změnou polohy hmotného bodu a tomu odpovídající změnou rychlosti pohybu.

**Konzervativní síla a potenciální energie**

Obecně platí, že pro konzervativní sílu $\vec{F}$ můžeme zavést **potenciální energii** $E_p$. Potenciální energie $E_p$ v určitém bodě je práce, kterou vykoná vnější síla $\vec{F}'$ (stejně velká jako síla $\vec{F}$, ale opačného směru) při přenášení hmotného bodu o hmotnosti $m$ z bodu $P_1$ (jeho polohu udává polohový vektor $\vec{r}_1$) do bodu $P_2$ (jeho polohu udává polohový vektor $\vec{r}_2$). Protože $\vec{F}' = -\vec{F}$, můžeme psát:

$$\boxed{\Delta E_p = \int_{P_1(\vec{r}_1)}^{P_2(\vec{r}_2)} \vec{F}' \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1(\vec{r}_1)}^{P_2(\vec{r}_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad .} \tag{3.54}$$

Znaménko (-) ve výrazu pro potenciální energii znamená, že práce vykonaná konzervativní silou pole zmenšuje potenciální energii (zároveň se zvětšuje kinetická energie) a v každém bodě je jejich součet konstantní. Říkáme, že **energie se zachovává (konzervuje)**. Práce vykonaná v systému konzervativními silami je rovna úbytku potenciální energie $E_p$ systému.

Vztah pro potenciální energii (3.54) určuje pouze změnu potenciální energie při přemístění hmotného bodu. Proto udáváme potenciální energii vztaženou vždy k nějakému bodu, nebo množině bodů se stejnou potenciální energií. Hladinu $E_p = 0$ můžeme volit např. v nekonečnu, nebo na zemském povrchu.

**Určení vztahu pro sílu ze známého průběhu potenciální energie**

Ze vztahu 3.55 vyplývá

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_p \\ dW &= -dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad . \end{aligned} \tag{3.55}$$

Výraz $dE_p$ vyjadřuje tzv. totální diferenciál (kapitola 2). Druhou rovnici 3.55 lze zapsat ve tvaru (kapitola 2, rov. 2.9)

$$-dE_p = -\left( \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad , \tag{3.56}$$

kde vlevo je matematický zápis totálního diferenciálu pomocí tzv. parciálních derivací (funkce více proměnných) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ a na pravé straně je roznásobený skalární součin vektorů $\vec{F}$ a $d\vec{r}$ .

Úpravou rovnice dostaneme vztah pro jednotlivé složky vektoru síly

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad . \tag{3.57}$$

To se pomocí vektorového operátoru **gradient (gradient** se nazývá diferenciální operátor, jehož výsledkem je vektorové pole (vektor) vyjadřující směr a velikost největší změny skalárního pole (skalární veličiny), značí se nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$**)** nechá zapsat **:**

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad } E_p} \tag{3.58}$$

**Tato rovnice vyjadřuje fakt, že konzervativní síla míří ve směru úbytku potenciální energie.**

Podobně jako intenzitu pole (uvedeno u příkladu gravitačního pole) můžeme ještě pro konzervativní sílu definovat skalární funkci **potenciál pole** $U = U(\vec{r})$.

Například pro gravitační pole se potenciál definuje jako:

$$\boxed{U = \frac{E_p}{m}} \tag{3.59}$$

kde $U$ se nazývá **potenciál pole**. Jednotkou gravitačního potenciálu je $[U]$ = J.kg$^{-1}$ a podle (3.59) platí

$$\vec{K} = -\text{grad } U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad . \tag{3.60}$$

Obecně můžeme shrnout vlastnosti pole konzervativní síly. Toto pole je:

- **stacionární** tj. s časem se nemění, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (pro gravitační pole plyne z (3.46))
- **potenciálové** tj. můžeme zavést skalární veličiny potenciální energie a potenciál.

**Příklad**

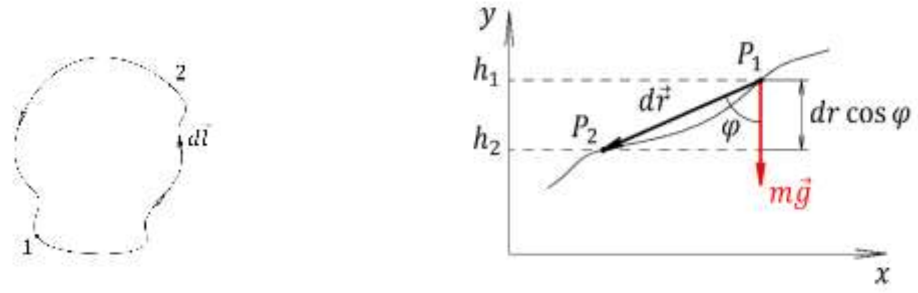
Ukažme nyní, že tíhové pole je konzervativní, tedy že platí pro práci vykonanou po uzavřené křivce (obr. 3.18) vztah $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Předpokládejme, že hmotný bod se pohybuje v tíhovém poli Země (v blízkosti Země) křivočarým pohybem.

Práce vykonaná tíhovou silou na elementární dráze $dr$ je $dW$ a celková práce $W$ po dráze $s$ je rovna

$$W = mg\int_{P_1}^{P_2} dr\cos\varphi \ , \qquad (3.61)$$

kde $\varphi$ je úhel který svírají vektory $d\vec{r}$ a síla $m\vec{g}$ . Velikost $dr\cos\varphi = dh$ .




*Obr. 3.18*

Celková práce vykonaná tíhovou silou po dráze mezi body $P_1$ a $P_2$ je

$$W = mg\int_{P_1}^{P_2} dr\cos\varphi = mg\int_{h_1}^{h_2} dh = \left[mgh\right]_{h_1}^{h_2} = mg\left(h_2 - h_1\right), \qquad (3.62)$$

kde $\left(h_2 - h_1\right)$ je celková změna výšky hmotného bodu (změna *y*-ové souřadnice). Jak vyplývá z obr. 3.18 vykonaná práce přitom závisí pouze na rozdílu výšek bodů $P_1$ a $P_2$ (*y*-ové souřadnice), nikoliv na cestě mezi body $P_1$ a $P_2$. Práce po jakékoliv jiné dráze mezi body $P_1$ a $P_2$ bude stejná. Jestliže bude tíhová síla působit po dráze z bodu $P_1$ do bodu $P_2$ a nazpět do bodu $P_1$, tedy po uzavřené křivce, bude vzhledem k platnosti (3.53) celková vykonaná práce $W = 0$, a tedy platí vztah (3.54), gravitační síla je silou konzervativní.

**Kinetická energie**

Uvažujme ještě, že hmotný bod se pohybuje z bodu $P_1$ do bodu $P_2$ podle obr. 3.18 a změní přitom svoji rychlost z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$ . Práce, která se po této dráze silou $\vec{F}$ vykoná, je

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} = m\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt}\, \vec{v}dt = \\ &= m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v}d\vec{v} = m\int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \ , \end{aligned} \qquad (3.63)$$

kde $dv = \left|d\vec{v}\right|\cos\alpha$ je přírůstek velikosti vektoru $\vec{v}$ . Vztah $\frac{1}{2}mv^2$ je známý výraz pro kinetickou energii hmotného bodu. Práce $W$ je rovna přírůstku kinetické energie hmotného bodu. Je-li rychlost $v_2$ větší než $v_1$, pak vykonaná práce je $W > 0$, kinetická energie se zvětšila.

Rychlost částice se změní z původní $\vec{v}_1$ (v bodě $P_1$) na rychlost $\vec{v}_2$ (v bodě $P_2$). Celková vykonaná práce se projeví změnou kinetické energie hmotného bodu podle vztahů 3.64, ale zároveň dochází ke změně potenciální energie (3.55) a platí

$$W = -\Delta E_p = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

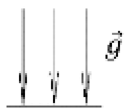
$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mg\left(h_2 - h_1\right) \quad . \qquad (3.64)$$

**Příklad**
Potenciální energie v tíhovém poli je rovna práci, kterou vykoná síla působící proti tíhové síle, přemístí-li hmotný bod z místa nulové potenciální energie do vzdálenosti $r$ o potenciální energií $E_p$. Za místo s nulovou potenciální energií zvolíme povrch Země ($r = R_z$), kde $R_z$ je poloměr Země. Potenciální energii hmotného bodu v poli ve výšce $h = r - R_z$ nad povrchem Země určíme dosazením vztahu pro sílu (3.47) do vztahu (3.55)

$$E_p = -\int_{R_z}^{R_z+h} \vec{F} d\vec{r} = \kappa\, mM_z \int_{R_z}^{R_z+h} \frac{1}{r^2} dr = \frac{\kappa\, M_z mh}{R_z^2}\left(1 + \frac{h}{R_z}\right)^{-1} = mg_0 h\left(1 + \frac{h}{R_z}\right)^{-1} \qquad (3.65)$$

kde $\dfrac{\kappa\, M_z}{R_z^2} = g_0$ jsme označili velikost tíhového zrychlení na povrchu Země.

V blízkosti zemského povrchu ($h << R_z$) můžeme považovat tíhové pole za **homogenní** (obr. 3.19)




*Obr. 3.19*

(tj. $\vec{g} = konst.$) a vztah (3.65) se zjednoduší na známý tvar:

$$\boxed{E_p = mg_0 h} \qquad (3.66)$$

Potenciální energii můžeme zavést i pro jiná silová pole, např. pole elektrostatické, které je rovněž konzervativním polem.

### 3.2.9 Zákon zachování energie

Jestliže síla $\vec{F}$ , která je konzervativní silou, je jedinou silou působící na hmotný bod, pak práce vykonaná touto silou po určité dráze je rovna přírůstku kinetické energie a úbytku potenciální energie hmotného bodu

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = \Delta E_k$$
$$\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta\left(E_k + E_p\right) = 0 \Rightarrow \quad \boxed{E_k + E_p = konst.} \tag{3.67}$$

kde součet kinetické a potenciální energie představuje celkovou mechanickou energii hmotného bodu. Vztah (3.67) vyjadřuje **zachování (konzervaci) celkové mechanické energie během pohybu hmotného bodu** .

Zákon zachování mechanické energie je speciální formou **obecného zákona zachování energie** (ve kterém nezanedbáváme změny dalších druhů energie těles).

### 3.2.10 Výkon

Veličina, která hodnotí velikost vykonané práce vzhledem k vynaloženému času, se nazývá **výkon** . Okamžitý výkon *P* je definován

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} \quad .} \tag{3.68}$$

Jednotkou výkonu je $[P]$ = J.s$^{-1}$ = kg.m$^{2}$.s$^{-3}$ = 1 W (watt).

Velikost práce můžeme stanovit ze známého výkonu a času

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt\ . \tag{3.69}$$

Jestliže ze vztahu (3.52) dosadíme za práci pomocí definičního vztahu, potom

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}\ \ , \tag{3.70}$$

při splnění předpokladu, že $\vec{F}$ není funkcí času a $\vec{v}$ je rychlost pohybu působiště síly.

**Příklady:**

1) Jak se změní intenzita gravitačního pole Země ve vzdálenosti 1000 km od jejího povrchu? Poloměr Země na rovníku je 6378 km.

Řešení: Využijeme vztahu (3.48) pro výpočet intenzity gravitačního pole, $K_z$ označíme intenzitu na povrchu Země, $K_h$ intenzitu ve výšce $h$ = 1000 km, $R_z$ je poloměr Země.

$$K_z = \kappa \frac{M_z}{R_z^2} \qquad K_h = \kappa \frac{M_z}{\left(R_z + h\right)^2}$$

$$\frac{K_h}{K_z} = \frac{\kappa \dfrac{M_z}{\left(R_z+h\right)^2}}{\kappa \dfrac{M_z}{R_z^2}} = \frac{R_z^2}{\left(R_z+h\right)^2} = \left(\frac{6378}{7378}\right)^2 = 0,75 \Rightarrow K_h = 0,75 K_z$$

2) Hubbleův vesmírný dalekohled se pohybuje po oběžné dráze ve výšce 576 km nad povrchem Země.
   a) Jakou rychlostí se pohybuje?
   b) Jaká je jeho oběžná doba?

Řešení: Vyjdeme z předpokladu, že odstředivá síla působící na těleso o hmotnosti $m$ ve výšce $h$ = 576 km se při pohybu po kružnici rovná síle gravitační působící na totéž těleso. Použitím vztahů (3.27) (3.47) dostaneme (gravitační konstanta $\kappa$ a hmotnost Země $M_z$ jsou tabulkové hodnoty)

$$\kappa \frac{mM_z}{\left(R_z+h\right)^2} = m\omega^2\left(R_z+h\right) = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(R_z+h\right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(R_z+h\right)^3}{\kappa M_z}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(6378.10^3+576.10^3\right)^3}{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}} = 5758 \text{ s}$$

$$v = \omega\left(R_z+h\right) = \frac{2\pi}{T}\left(R_z+h\right) \quad \Rightarrow v = \frac{2\pi}{5758}\left(6378.10^3+576.10^3\right) = 7584 \text{ m.s}^{-1}$$

3) Určete práci, kterou je třeba vynaložit na stlačení nárazníkové pružiny vagonu o délku $x_0 = 50$ mm, jestliže pro sílu při stlačení o délku $x$ platí vztah: $F = kx$ ($k$ = $3.10^6$ $\text{N.m}^{-1}$ je tuhost pružiny).

Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro výpočet práce a uvažujeme pohyb ve směru osy $x$.

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F dx = \int_0^{x_0} kx dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}k{x_0}^2 = \frac{1}{2}.3.10^6.0,05^2 = 3750 \text{ J}$$