2 Základy vektorového počtu

2.1 Základní pojmy

Matematicky mají fyzikální veličiny charakter skalárů, vektorů a tenzorů.

Skalární veličina je plně určena jediným údajem, číslem. Skalární veličina je například čas, energie, hustota, hmotnost, objem.

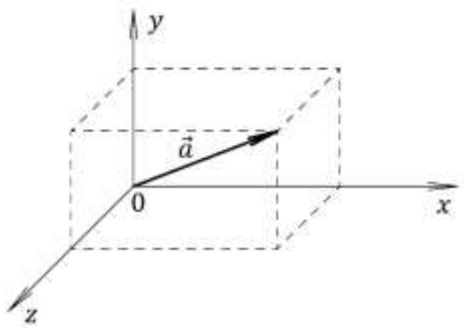
Vektorová veličina je fyzikální veličina určená velikostí a směrem v prostoru. **Velikost vektoru** je nezáporné číslo určující ve fyzice velikost příslušné vektorové veličiny a je rovna délce úsečky představující vektor. Výjimkou je **nulový vektor**, který značíme $\vec{0}$, jeho velikost má číselnou hodnotu rovnou nule a jeho směr není definován. Pro libovolný vektor $\vec{a}$ platí $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Velikost vektoru budeme značit v textu písmenem *a* bez šipky nebo $|\vec{a}|$. Vektorem je například rychlost, zrychlení, síla.

Tenzorová veličina - kromě skalárů a vektorů (které jsou tenzory nultého a prvního řádu) existují ještě další a složitější algebraická struktury, **tenzory** vyšších řádů. Z nich nejběžnější a nejjednodušší jsou tenzory druhého řádu, které obvykle popisují fyzikální pole se smykovými účinky v mechanice kontinua, například tenzor deformace, tenzor napětí atd.

2.1.1 Operace s vektory

V matematice je vektor definován jako prvek množiny, na níž jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Výsledkem těchto operací musí být opět vektor. Pro operace s vektory platí komutativní, asociativní a distributivní zákony a je definován nulový a opačný vektor.



Obr. 2.1

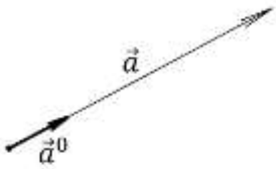
2. ZÁKLADY VEKTOROVÉHO POČTU

Vektor, který můžeme v prostoru umístit rovnoběžným posunutím tak, že zvolíme libovolně jeho počáteční bod, se nazývá **volný vektor** (např. moment dvojice sil).

Vektor, jehož počátek (působiště) je vázán na určitý bod v prostoru se nazývá **vázaný vektor (**obr. 2.1**)**.

Vektor opačný k vektoru $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$, který má stejnou velikost jako vektor $\vec{a}$, ale opačný směr.

Vektor jednotkový k vektoru $\vec{a}$ je vektor $\vec{a}^0$, jehož velikost $\left|\vec{a}^0\right| = 1$ a platí $\vec{a} = a\vec{a}^0$ (obr. 2.2) .



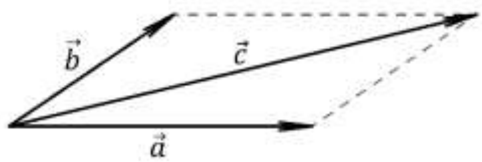
Obr. 2.2

Rovnost vektorů

Mají-li dva volné vektory stejnou velikost i směr, říkáme, že se rovnají.

Sčítání vektorů

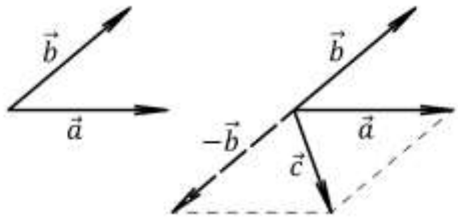
Sečteme-li dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, výsledkem je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (obr. 2.3), konstrukci výsledného součtového vektoru dvou vektorů můžeme provést pomocí rovnoběžek, takzvaným doplněním na rovnoběžník. Oba vektory umístíme do jednoho působiště a jejich koncovými body vedeme rovnoběžky s vektory vytvoříme rovnoběžník. Součet obou vektorů je potom vektor vycházející ze společného působiště a určený úhlopříčkou rovnoběžníku.



Obr. 2.3

Odečítání vektorů

Rozdíl vektorů $\vec{a} - \vec{b}$ je dán vektorem $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (obr. 2.4).



Obr. 2.4

Násobení vektoru číslem (skalárem)

Výsledkem násobení vektoru $\vec{a}$ číslem $k \neq 0$ je vektor $k\vec{a}$ pokud je $k > 0$, je to vektor stejně orientovaný jako vektor $\vec{a}$, pokud je $k < 0$, je to vektor opačný k vektoru $\vec{a}$.

Skalární součin dvou vektorů

Skalární součin dvou vektorů $\vec{a},\vec{b}$ je definován jako:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi\ ,} \tag{2.1}$$

kde a,b jsou velikosti vektorů a φ je úhel, který vektory svírají.

Výsledkem skalárního součinu je **číslo**. Skalární součin se značí tečkou “•“ a je komutativní. Platí:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \text{vektory } \vec{a},\vec{b} \text{ jsou kolmé}$$

Vektorový součin dvou vektorů

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{a},\vec{b}$ je definován jako:

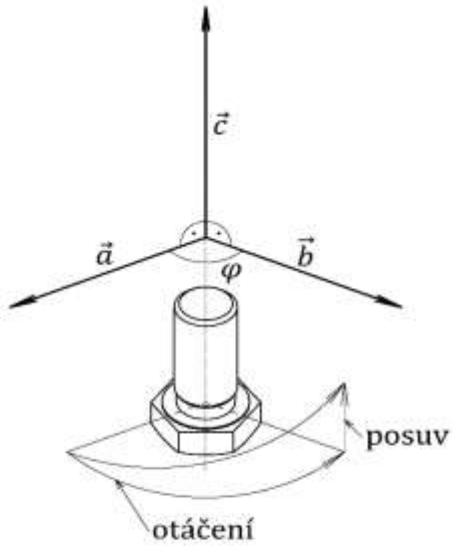
$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \\ &|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\varphi\ , \end{aligned}} \tag{2.2}$$

kde a,b jsou velikosti vektorů a φ je úhel, který vektory svírají.

Výsledkem vektorového součinu je **vektor**, který je kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a},\vec{b}$ a jehož směr určíme pomocí pravidla pravé ruky (pravotočivého šroubu obr. 2.5). Jestliže bychom otočili pravotočivým šroubem ve směru od prvního vektoru $\vec{a}$ ve vektorovém součinu ke druhému vektoru v součinu $\vec{b}$ (ve směru menšího úhlu), výsledný vektor $\vec{c}$ by byl orientován ve směru zavrtávání šroubu. Vektorový součin značíme křížkem “×“ a **není** komutativní. Platí

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{vektory } \vec{a},\vec{b} \text{ jsou rovnoběžné.}$$



Obr. 2.5

Vícenásobný součin vektorů

Pro vektorový a skalární součin více vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ platí

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \quad . \tag{2.3}$$

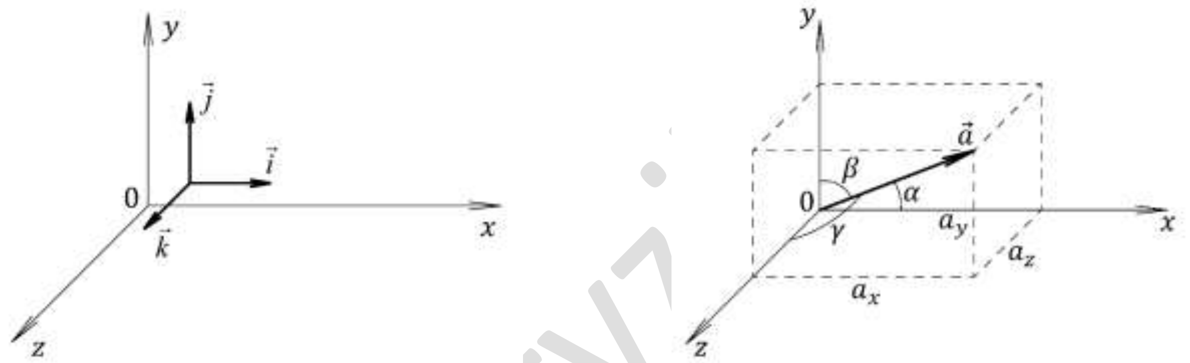
2.2 Vyjádření vektorů a operací s nimi v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic

Soustava souřadnic je vztažná soustava, vzhledem k níž je v trojrozměrném prostoru poloha libovolného bodu **jednoznačně určena** uspořádanou trojicí čísel, které nazýváme **souřadnice**.

Pokud máme tři stejné číselné osy *x,y,z* v prostoru, pro něž platí:

- všechny osy jsou navzájem kolmé
- protínají se v jednom bodě
- jejich průsečíku O odpovídá na všech osách číslo 0

potom se tato soustava tří os nazývá **kartézská soustava souřadnic v prostoru** a označuje se *Oxyz*



Obr. 2.6

Bod 0 se nazývá **počátek kartézské soustavy souřadnic** a přímky *x*, *y*, *z* se nazývají **souřadnicové osy**. Roviny určené dvojicemi souřadnicových os se nazývají **souřadnicové roviny**.

Směr os udávají jednotkové vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (Obr. 2.6). Velikost $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Ve skriptech bude používána vždy pravotočivá soustava souřadnic, tedy taková, pro kterou platí: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Pravoúhlé (kolmé) průměty $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$, $\vec{a}_z = a_z\vec{k}$ vektoru $\vec{a}$ do směru vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se nazývají **složkové vektory**. Čísla a_x, a_y, a_z budeme nazývat **složky vektoru** $\vec{a}$.

Velikost a vektoru $\vec{a}$ je rovna:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.4)$$

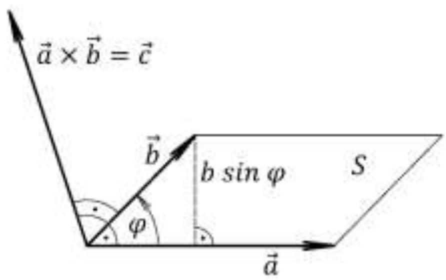
Pro směrové kosiny (obr. 2.6) platí: $a_x = a\cos\alpha,\ a_y = a\cos\beta,\ a_z = a\cos\gamma$. Pokud známe velikost vektoru a jeho směrové kosiny, můžeme určit složky vektoru, a naopak.

Zapišme vektory $\vec{a},\vec{b}$ ve tvaru $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, potom platí pro:

- Součet vektorů $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$
- Rozdíl vektorů $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$
- Skalární součin vektorů $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{=1} + a_y b_y \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{=1} + a_z b_z \underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{=1} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- Vektorový součin vektorů

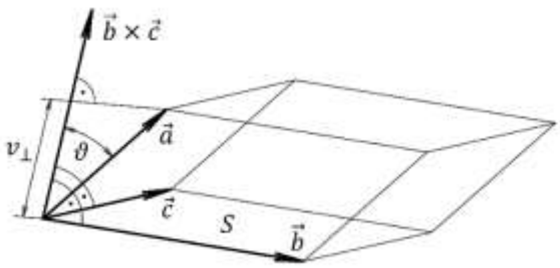
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \end{vmatrix} = \vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Vektorový součin vektorů $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\alpha$ vyjadřuje plochu rovnoběžníku, jehož strany tvoří vektory $\vec{a},\vec{b}$. (obr. 2.7)



Obr. 2.7

Smíšený součin vektorů $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| \cos\vartheta = v_\perp S = V$ tvoří z geometrického hlediska objem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany tvoří vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (obr. 2.8).



Obr. 2.8

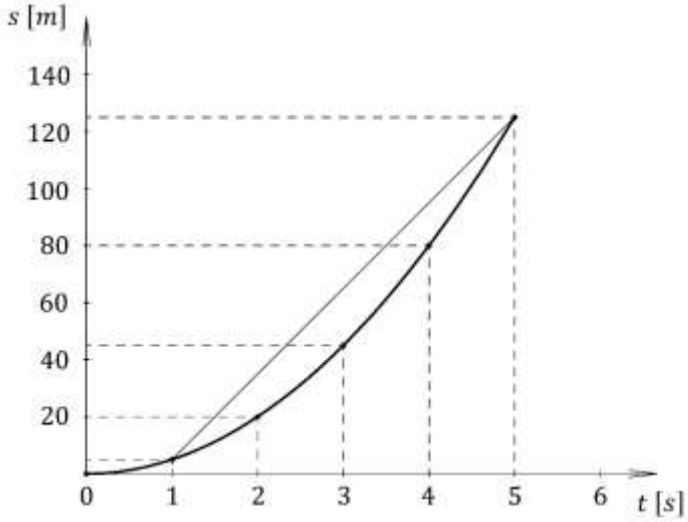
2.3 Diferenciální počet ve fyzice

Význam využití diferenciálního počtu ve fyzice si ukážeme na příkladu volného pádu. Dráhu volného pádu *s*, které těleso pohybující se volným pádem s tíhovým zrychlení *g* urazí za čas *t*, určíme ze vztahu $s = \frac{1}{2} g t^2$.

(2.5)

t [s]	0	1	2	3	4	5
s [m]	0	5	20	45	80	125

Pro tento případ budeme počítat s $g = 10$ m.s^{-2} a předpokládat, že v čase $t = 0$ je $s = 0$).



Obr. 2.9

Pokud chceme zjistit velikost průměrné rychlosti tělesa, můžeme ji určit tak, že zjistíme, jakou dráhu těleso urazilo za určitý časový interval. Tak například průměrná rychlost mezi 1. a 5. sekundou pohybu je

$$v_{1;5} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125-5}{5-1} = 30 \text{ m.s}^{-1} \quad .$$

Stejně můžeme určit průměrnou rychlost v jiném časovém intervalu, i libovolně menším. Tak například:

$$v_{1;3} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{45-5}{3-1} = 20\ \text{m.s}^{-1} \qquad v_{1;2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20-5}{2-1} = 15\ \text{m.s}^{-1}\ .$$

Obecně pro dráhu, kterou těleso urazí za čas t a za čas $t+\Delta t$ platí

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2; \quad s(t+\Delta t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$$

$$v_p = \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g\left(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2\right) - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{g\Delta t}{2}\ . \tag{2.6}$$

Pokud tedy chceme zjistit velikost **průměrné rychlosti** tělesa obecně, můžeme ji určit z tohoto vztahu (2.6). Budeme-li časový interval Δt zmenšovat, bude sečna v obrázku přecházet v tečnu ke křivce a průměrná rychlost se bude limitně blížit hodnotě **okamžité rychlosti** v tomto bodě. Dokonce můžeme uvažovat případ pro $\Delta t = 0$ (to jsme v předchozích výpočtech průměrné rychlosti nemohli udělat z důvodu dělení nulou) a dostáváme vztah pro okamžitou rychlost tělesa pohybujícího se volným pádem:

$$v = gt\ .$$

(2.7)

Tuto rovnici pro okamžitou rychlost volného pádu už známe, ale zřejmě tuto metodu bude možno použít obecně a určit tak **okamžitou rychlost i složitějších pohybů**.

Zjistili jsme tedy, že vztah pro okamžitou rychlost matematicky přesně získáme, pokud se časový interval Δt zmenšuje k nule. To lze zapsat jako

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\ . \tag{2.8}$$

Symbol *ds* (resp. *dt*) se nazývá **diferenciál** dráhy (resp. diferenciál času) a vyjadřuje nekonečně malý interval, jejich podíl se nazývá **derivace** dráhy podle času.

Tento závěr lze zobecnit a formulovat tak, že okamžitou rychlost *v*(*t*) v čase *t* obecného pohybu získáme jako hodnotu derivace dráhy podle času.

Ještě obecněji lze říci, že známe-li vyjádření trajektorie pohybu jako funkci času *s*(*t*), potom derivací této funkce získáme závislost okamžité rychlosti na čase *v*(*t*) .

Derivace některých obecných elementárních funkcí (značíme $\frac{df}{dx}$ nebo f') a pravidla pro derivování v jejich definičním oboru, které budeme používat v následujícím textu:

$$\frac{d}{dx}(konst.) = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$
$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

V diferenciálním počtu ve fyzice se ještě využívá derivací parciálních a totálního diferenciálu, které jsou definovány pro funkce více proměnných.

Parciální derivace funkce více proměnných $f\left(x_1, x_2....x_n\right)$ je její derivace podle jedné z těchto proměnných, s ostatními proměnnými pracujeme jako s konstantami. Parciální derivaci značíme $\frac{\partial f}{\partial x}$. Nechť existují parciální derivace funkce $f\left(x_1, x_2....x_n\right)$ v bodě $[x_1, \dots x_n]$. Potom výraz

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

(2.9)

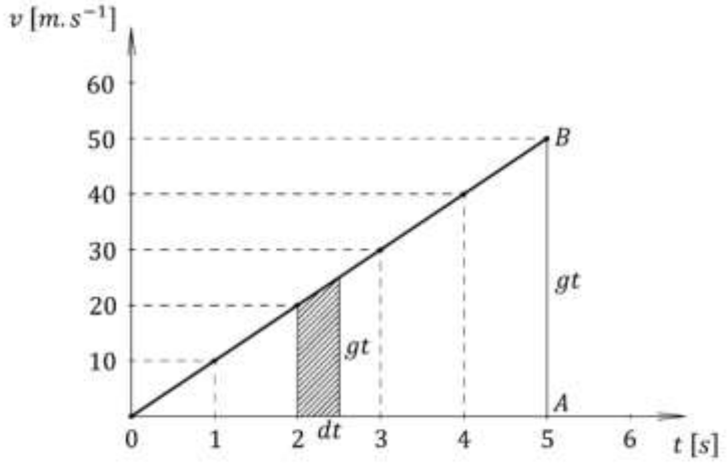
nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě $[x_1, \dots x_n]$.

Pokud tedy můžeme určit vztah pro závislosti okamžité rychlosti na čase obecně ze znalosti závislosti dráhy na čase, zkusme zjistit, je-li to možné i naopak.

Předpokládejme, že byla experimentálně zjištěna závislost rychlosti tělesa (hmotného bodu) pohybujícího se volným pádem na čase (předpoklad v čase t = 0 s je v = 0 m.s^{-1} a s = 0 m, g = 10 m.s^{-2}) viz. obr. 2.10.

$$v(t) = gt$$

(2.10)



Obr. 2.10

Dráha, kterou urazí těleso pohybující se rychlostí v za čas t je rovna $s = vt$, ovšem pouze za předpokladu, že rychlost je během pohybu **konstantní**. **Pokud je rychlost funkcí času**, můžeme ji považovat za konstantní pouze ve **velice malém časovém intervalu *dt***, za který těleso urazí dráhu $ds = v(t)dt$ a celková dráha bude zřejmě součtem všech těchto ds v intervalu $\langle 0\ \mathrm{s}\ ;\ 5\ \mathrm{s}\rangle$.

Pro tento příklad (obr. 2.10) je $ds = v(t)dt = gtdt$ a celková dráha, kterou těleso urazí za čas např. $t = 5$ s je dána součtem všech ds – tedy číselně se rovná obsahu trojúhelníku 0AB.

A pokud uvažujeme i fyzikální význam os x a y, potom:

$$s = \sum ds = \sum gt\ dt = S_{\Delta 0AB} = \frac{1}{2}gtt = \frac{1}{2}50\ \mathrm{m.s^{-1}}.5\ \mathrm{s} = 125\ \mathrm{m}\ .$$

Obecně můžeme tento postup zapsat :

$$s(t) = \int ds = \int_0^5 vdt = \int_0^5 gtdt = \left[\frac{1}{2}gt^2\right]_0^5 = \frac{1}{2}10.5^2 - \frac{1}{2}10.0^2 = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \qquad ,$$

(2.11)

kde symbolem $\int$ rozumíme „integrál“, který je označením součtu nekonečně malých veličin ($n \to \infty$).

V tomto případě, pokud je výsledkem určitá číselná hodnota, hovoříme o **určitém integrálu**.

Integraci funkce lze chápat jako matematickou operaci opačnou (inverzní) k derivaci. Máme-li funkci $f(x)$, potom platí :

$$f(x) \xrightarrow{\text{derivace}} \frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \xrightarrow{\text{integrace}} f(x)$$

Pro náš příklad: $f(t) = \frac{1}{2}gt^2,\ f'(t) = gt$ a opačně integrací dostaneme funkci $\int gtdt = \frac{1}{2}gt^2 + C$

Tento integrál se nazývá neurčitý, a funkce, která je výsledkem integrace se nazývá primitivní funkce, která je určena až na konstantu, kterou určujeme z počátečních podmínek.

Podobně jako u derivace uvedeme primitivní funkce pro některé elementární funkce:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1) \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x \qquad \int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int e^x \quad dx = e^x$$

V textu skript ještě využijeme následující vztahy pro goniometrické funkce:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$